目　录

第一章　积分方程

第二章　变分学

第一章　积分方程

1．积分方程的形成的举例　在积分号下含有未知函数的一切方程都称为积分方程。設求微分方程 $y'=f(x, y)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解。我們已在前面[**II; 51**]見过这个問題归結到求解积分方程：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(x, y)dx+y_0。$$

十分相似地也可把有已給初始值 $y(x_0)=y_0$；$y'(x_0)=y'_0$ 的二阶微分方程 $y''=f(x, y)$ 的求解問題归結到求解积分方程：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f[z, y(z)]dz+y_0+y'_0(x-x_0)。$$

把二重积分变作單积分[**II; 15**]，可將这方程写为下面的形式：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} (x-z)f[z, y(z)]dz+y_0+y'_0(x-x_0)。$$

从积分方程

$$y(x)=\int_{0}^{x} (x-z)f[z, y(z)]dz+c_1+c_2x, \tag{1}$$

得到方程 $y''=f(x, y)$ 的通解，其中 c_1 及 c_2 是任意常数，而积分的下限設为零。現在考察关于二阶方程的边界問題，也就是求满足边界条件 $y(0)=a; y(l)=b$ 的方程的解。如在方程（1）中首先令 $x=0$，再令 $x=l$，則得到决定任意常数的兩个方程，它們給出：

$$c_1=a;\ \ c_2=\frac{b-a}{l}-\frac{1}{l}\int_{0}^{l} (l-z)f[z, y(z)]dz。$$

將获得的值代入公式（1），我們把边界問題引导到积分方程：

(2) $$y(x)=F(x)+\int_0^x (x-z)f[z, y(z)]dz-$$
$$-\frac{x}{l}\int_0^l (l-z)f[z, y(z)]dz,$$

其中 $$F(x)=a+\frac{b-a}{l}x。$$

我們可將方程(2)写作下面的形式：

(3) $$y(x)=F(x)-\int_0^x \frac{z(l-x)}{l}f[z, y(z)]dz-$$
$$-\int_x^l \frac{x(l-z)}{l}f[z, y(z)]dz。$$

我們引入兩个变量的函数：

(4) $$K(x, z)=\begin{cases}\frac{z(l-x)}{l}, \text{当 } z\leqslant x \text{ 时；}\\ \frac{x(l-z)}{l}, \text{当 } x\leqslant z \text{ 时。}\end{cases}$$

借助于这个函数，方程(3)可写作下面的式样：

(5) $$y(x)=F(x)-\int_0^l K(x, z)f[z, y(z)]dz。$$

应用获得的結果到綫性方程

(6) $$y''+p(x)y=\omega(x)。$$

我們可断言在边界条件：

(7) $$y(0)=a; \quad y(l)=b$$

下这方程的求解問題与从綫性积分方程：

(8) $$y(x)=F_1(x)+\int_0^l K(x, z)p(z)y(z)dz$$

求函数 $y(x)$ 是一样的，其中

$$F_1(x)=F(x)-\int_0^l K(x, z)\omega(z)dz$$

是依賴于变量 x 的已知函数。

我們看出，在方程（1）内积分的上限是变量，而在方程（8）内积分的兩限都是常数。还看出，無論在方程（1）内或方程（8）内待求函数不仅在积分号下出現而且也在积分号外出現。我們在以前 [II; 50] 已見过当采用逐次迫近法以解方程时这情况是極重要的。

用某参数 λ 乘方程（6）的系数 $p(x)$，且考察在齐次边界条件：

$$(9)\qquad y(0)=0;\quad y(l)=0$$

下的齐次方程

$$(10)\qquad y''+\lambda p(x)y=0。$$

这个齐次边界問題引导到含有参数 λ 的齐次积分方程：

$$(11)\qquad y(x)=\lambda\int_0^l K(x,z)p(z)y(z)dz。$$

在以后的基本問題中有这样一个問題，参数 λ 应取什么样的值使提出的問題有不恒等于零的解。在应用富里埃方法到数学物理的边界問題时，我們以前曾經遇到过这样問題。还应指出函数 $K(x,z)$ 的某些特征，这个函数叫做积分方程的核。这个核在由不等式 $0\leqslant x\leqslant l$ 及 $0\leqslant z\leqslant l$ 所确定的正方形 k_0 内是連續的。在这个正方形的对角綫上，亦即在 $x=z$ 时，核的一阶导数有了跳躍：

$$K_x(x,z)\,|_{x=z+0}-K_x(x,z)\,|_{x=z-0}=-1。$$

其次，如果把提到的核看作 x 的函数，在对角綫的外面，这函数是齐次方程 $y''=0$ 满足齐次边界条件（9）的解。最后我們指出，由等式

$$(12)\qquad K(z,x)=K(x,z)$$

所表現出的核的对称性質。核的所有这些性質立卽从公式（4）显出。

核 $K(x,z)$ 具有簡單的物理意义。我們回忆，当集中力作用

在兩端固定的絃的一点 $x=z$ 时，在力所作用的这点处应有条件[II;163]：

$$T_0[(u_x)_{x=z+0}-(u_x)_{x=z-0}]=-P,$$

其中 P 是作用力的大小。不难驗証的是：函数

$$u(x)=\frac{P}{T_0}K(x,z)$$

給出在上面提到的集中力的作用下絃的靜力弯曲的形狀。这时我們注意，在靜力情况內絃的波动方程簡單地归結到方程 $u_{xx}=0$。我們这里就最簡單情形来講的，把边界問題引导到积分方程的种种思想，將在第四章里詳細講到。

我們还指出把数学物理的边界問題引导到积分方程的一个特殊方法。以前曾用下面形式：

$$u(M)=\iint_S\frac{\rho(M')}{d}\,ds$$

来定义球壳的勢函数，其中 $\rho(M')$ 是在球面 S 上的已知函数，ds 是球面的面积元素，而 d 是空間点 M 到球面上变点 M' 的距离。設 n 是球面上某点 M_0 的法綫方向。用 $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i$ 及 $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e$ 表示当变点 M 从球的內部及外部趋于点 M_0 时导数 $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ 的極限値。我們以前 [III$_2$;138] 曾引出过下面的公式：

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i&=-\iint_S\rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds+2\pi\rho(M_0),\\\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e&=-\iint_S\rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds-2\pi\rho(M_0),\end{aligned}\tag{13}$$

其中 d 是从点 M_0 到球面上变点 M' 的距离，而 ω 是向徑 $M'M_0$ 与方向 n 的交角。

在后一章中我們將見这些公式不仅对于球面有效。現在我們提出对于球面的諾伊曼內部問題，也就是，設求一函数它在球的內

部是調和的，且它的法綫导数在球面上有已知边界值：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f(M_0)。\tag{14}$$

待求的函数 u 將是球壳的勢函数的形式。这个勢函数在球的內部是調和的，且只要选擇这个勢函数的密度 $\rho(M')$ 使它也滿足边界条件(14)。注意公式(13)中的第一式及边界条件(14)，我們获得决定待求密度的下面的积分方程：

$$2\pi\rho(M_0)=f(M_0)+\iint\limits_S \rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds。$$

我們看出，在已給情况下函数 $f(M)$ 及 $\rho(M)$ 必須确定在球面上，且积分不像上例中那样展布在 OX 軸的区間上而是在球面上。

2. 积分方程的分类 我們暫时只考虑这样情况的綫性积分方程，它的待求函数应确定在 OX 軸上。我們写积分方程

$$y(x)=\int_a^x K(x,\ z)y(z)dz+f(x),\tag{15}$$

其中 $y(x)$ 是待求函数，而 $f(x)$ 及 $K(x,\ z)$ 是已知函数。像前面已經提到过的，函数 $K(x,z)$ 称为积分方程的核。

所写的方程称为渥尔特拉第二种方程。具有常数积分限的相似方程：

$$y(x)=\int_a^b K(x,\ z)y(z)dz+f(x)\tag{16}$$

称为弗列德和蒙第二种方程。若待求函数仅出現在积分号下，則我們获得渥尔特拉或弗列德和蒙第一种方程。它們有如下的形式：

$$\int_c^x K(x,\ z)y(z)dz=f_1(x);\quad \int_a^b K(x,\ z)y(z)dz=f_1(x)。\tag{17}$$

作为渥尔特拉第一种方程的例就是以前 [**II**; **79**] 曾經講过的亚貝尔方程：

$$\varphi(h)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{v(y)dy}{\sqrt{h-y}}。$$

我們給出弗列德和蒙第一种方程的一个例子。設 $u(x)$ 是当絃具有对于單位長計算的連續分布的荷重 $p(z)$ 时絃的靜力弯曲。我們將把这个連續分布的荷重看作集中荷重 $p(z)dz$ 的和。每一这样集中荷重，按照上节所述，使我們得到絃的靜力弯曲如下：

$$\frac{1}{T_0}K(x,z)p(z)dz,$$

其中 $K(x,z)$ 由公式(4)来确定。取积分，我們获得在連續分布的荷重下絃的靜力弯曲：

$$u(x)=\frac{1}{T_0}\int_0^l K(x,z)p(z)dz。$$

若弯曲 $u(x)$ 視作已知，而求相应的荷重 $p(z)$，这方程就是弗列德和蒙第一种方程。

我們注意，渥尔特拉方程是弗列德和蒙方程的特殊情况。事实上，若我們將以前定义的核 $K(x,z)$ 預先加以条件：当 $z>x$ 时 $K(x,z)=0$，則在渥尔特拉方程内可对于 z 从 $z=a$ 到 $z=b$ 取积分。

以后我們几乎專致力于第二种方程，且主要是弗列德和蒙第二种方程。我們在解数学物理的边界問題时經常碰到的正是这种方程。第二种方程的理論較之第一种的簡單得多。前面已經提到过，若在积分号外有待求函数，就自然地可以采用逐次迫近法。

积分方程的理論在很多地方与綫性代数的問題相似，关于代数問題我們已在第三卷內闡明。我們回忆，在 n 維空間內有形如[**III**$_1$;**25**]：

$$y_i=a_{i1}u_1+\cdots+a_{in}u_n,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

的綫性变換且在写出的变換中系数 a_{ik} 組成了矩陣。这变換可用另一个样子写为以下形式：

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{u},$$

其中 $\boldsymbol{u}(u_1, \cdots, u_n)$是原来向量,$\boldsymbol{y}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是变换后向量,而 A 是由系数 a_{ik} 組成的矩陣。在积分方程的情况用通常在某区間 $[a, b]$ 內确定的函数来代替 n 維空間的向量。用核 $K(x, z)$ 来代替系数 a_{ik} 的矩陣,且用积分过程来代替求和,因而在所考察的情况綫性变换可表达如下公式:

$$y(x)=\int_a^b K(x, z)u(z)dz, \tag{18}$$

其中 $u(z)$ 是原来函数,而 $y(x)$ 是变换后函数。

其次,我們回忆所謂矩陣 A 的特征值是指参数λ这样的值,它使方程

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

有不等于零的解 $\boldsymbol{x}$。以后我們將称参数 λ 这样的值为核 $K(x, z)$ 或相应变换的特征値,它使齐次积分方程

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x, z)y(z)dz \tag{19}$$

有不恒等于零的解。我們看出,此处在参数 λ 的引用方面,与前面指出的代数問題并不完全相似。如果完全相似地来引用,我們必須代替(19)而写出下列方程:

$$\int_a^b K(x, z)y(z)dz=\lambda y(x)。$$

以后在积分方程的全部理論中我們將保持公式(19)的形式。

还要注意,使函数 $u(x)$对应于同一函数 $u(x)$的恒等变换[也就是使 $y(x)$与 $u(x)$等同的变换]不能表达为积分形式(18)。

在闡明积分方程的理論时,自然必須关于核 $K(x, z)$ 以及函数 $f(x)$ 及 $y(x)$作某些假設。

如同已經提到过的,我們暫將專致力于一維情况的积分方程。过渡到多維情况的方法將在下面指出。

最后，我們指出，今后通常認为已知及待求函数都是复函数：

$$K(x, z)=K_1(x, z)+K_2(x, z)i;$$
$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)i;$$
$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)i,$$

其中 $K_s(x, z)$，$f_s(x)$，$y_s(x)$ $(s=1, 2)$ 都是实函数。自变量永远被認为是实的。

在下节中我們將回忆正交函数系的性質且对于这个問題添加某些补充。这对于积分方程理論的闡明將是必要的。

以后將常常說到有限閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$（也就是这样的区間，它包含兩端点在內）。我們总是用符号 $[a, b]$ 記这样的区間。

3. 正交函数系 在区間 $[a, b]$ 內为連續的实函数

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots, \tag{20}$$

如果有

$$\int_a^b \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当 } p\neq q \text{ 时};\\ 1, & \text{当 } p=q \text{ 时},\end{cases} \tag{21}$$

則謂这些实函数在区間內構成正交标准系。

設 $f(x)$ 是任一实函数，在区間 $[a, b]$ 內是連續的。下数值

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \tag{22}$$

称为函数 $f(x)$ 关于系 (20) 的富里埃系数[閱 **II**;**156**]。由 c_k 的定义我們有等式：

$$\int_a^b\left[f(x)-\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right]^2dx=\int_a^b[f(x)]^2dx-\sum_{k=1}^n c_k^2, \tag{23}$$

这等式把函数 $f(x)$ 在用它的富里埃級数的部份和 $s_n(x)$ 来代替时所得的平方中値誤差表示为差式。从公式 (23) 显出以 c_k^2 为普通項的無穷級数的收斂性且有所謂貝塞尔不等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx \text{。} \tag{24}$$

若对于任何連續函数 $f(x)$ 在公式(24)中等号成立，也就是若对于任何連續函数有所謂完备公式：

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \tag{25}$$

則謂系(20)是完备的。完备公式表現出这样事实：当函数 $f(x)$ 代以它的富里埃級数的部份和 $s_n(x)$ 时，則当 n 無限增大时平方中值誤差趋于零。还要回忆，若我們作积分

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\right]^2 dx,$$

其中 a_k 是任意实系数，如果采取 a_k 等于函数 $f(x)$ 的富里埃系数，則这个积分的值將为最小[**II**;**148**]。

到現在为止，我們設函数 $\varphi_k(x)$ 及 $f(x)$ 是連續的。上面所說的一切在更一般情况下也保持正确的。例如，可以設这些函数是有界的且有有限个不連續点。我們注意，这时上面写出的所有积分显然都有意义。

設 $\varphi_k(x)$ 是連續的，而 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 內除了一点 $x=d$ 外也都是連續的，在这点的鄰域內它是無界的，并且

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{|x-d|^{\alpha}}, \tag{26}$$

其中 C 及 α 是常数且 $0<\alpha<\frac{1}{2}$。这时 $[f(x)]^2$ 是可积的[**II**;**82**]，且不等式(24)的証明完全保持有效，并且所有积分都有意义。正交函数理論的最为自然的扩充需要其他积分概念。我們將在第五卷予以闡明。

以后，如果沒有相反声明，我們將假設一切函数都是連續的。

我們来証明一个初等的引理。若 $\omega(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内是連續且非負的函数，又

$$\int_a^b \omega(x)\,dx=0, \tag{27}$$

則 $\omega(x)$ 在区間 $[a,b]$ 内恒等于零。設我們的断言不正确，且在所提到的区間内的某点 $x=c$ 处有 $\omega(c)>0$，則对于充分小的正数 ε，函数 $\omega(x)$ 在区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 内將是正的，且設 m (>0) 是它在这区間内的最小值。由于 $\omega(x)$ 的非負性，就有：

$$\int_a^b \omega(x)\,dx \geqslant \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \omega(x)\,dx \geqslant \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} m\,dx = 2\varepsilon m,$$

而这与条件(27)矛盾。

在[$\mathbf{III_1}$;**31**]中我們已見过，若有 m 个綫性無关的向量，則总可以做出同样多个兩兩正交且标准的向量，使原来的向量可由新向量綫性表出，反之也是一样。这一切对函数来說也完全适用。設

$$\psi_1(x),\ \cdots,\ \psi_m(x)$$

是在 $[a, b]$ 内連續且綫性無关的，卽含常系数 α_k 的恒等关系式

$$\alpha_1\psi_1(x)+\cdots+\alpha_m\psi_m(x)\equiv 0,$$

只当这些系数都等于零的情况成立。現在我們来作在 $[a, b]$ 内为正交且标准化的新函数：

$$\varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_m(x),$$

使 $\varphi_k(x)$ 可由 $\psi_1(x), \cdots, \psi_k(x)$ 綫性表出，反之，一切 $\psi_k(x)$ 也可由 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x)$ 綫性表出。为簡写起見，我們引用代数中曾經用过的記号，卽用記号 (f, F) 来表示乘积 $f(x)F(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内的积分：

$$(f, F)=\int_a^b f(x)F(x)\,dx。$$

函数 $\psi_k(x)$ 的正交化手續，亦卽函数 $\varphi_k(x)$ 的構成手續，按以下方式进行：

$$\varphi_1(x)=\frac{\psi_1(x)}{\sqrt{(\psi_1,\psi_1)}}$$

$$\chi_2(x)=\psi_2(x)-(\psi_2,\varphi_1)\varphi_1(x);\qquad \varphi_2(x)=\frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(\chi_2,\chi_2)}}$$

$$\chi_3(x)=\psi_3(x)-(\psi_3,\varphi_2)\varphi_2(x)-(\psi_3,\varphi_1)\varphi_1(x);\ \varphi_3(x)=\frac{\chi_3(x)}{\sqrt{(\chi_3,\chi_3)}}$$

…………………………………………………………………………

$$\chi_m(x)=\psi_m(x)-(\psi_m,\varphi_{m-1})\varphi_{m-1}(x)-\cdots-(\psi_m,\varphi_1)\varphi_1(x);$$

$$\varphi_m(x)=\frac{\chi_m(x)}{\sqrt{(\chi_m,\chi_m)}}。$$

函数 $\varphi_k(x)$ 与 $\chi_k(x)$ 只相差一个常数因子,这个因子加到 $\chi_k(x)$ 是为了使这些函数标准化,亦即为了使它們的平方在 $[a, b]$ 上积分等于1。从所写出的公式立即显出在 $\psi_k(x)$ 及 $\varphi_k(x)$ 之間的綫性相关性,正如我們前面所說的。还要注意,在函数 $\chi_k(x)$ 中,沒有一个可变为恒等于零,因此 $(\chi_k,\chi_k)\neq 0$,因为比方說要是有 $\chi_2(x)\equiv 0$ 的話,則可引到 $\varphi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$ 之間的綫性相关性:

$$\psi_2(x)-(\psi_2,\varphi_1)\varphi_1(x)\equiv 0,$$

这归結到 $\psi_1(x)$ 及 $\psi_2(x)$ 之間的綫性相关性,而与諸函数 $\psi_k(x)$ 的綫性無关的假設矛盾。应用引理,从已确定的事实立即得出 $(\chi_k,\chi_k)\neq 0$,因为,否則应有 $\chi_k\equiv 0$。这样一来,确定函数 φ_k 的一切公式都有意义,函数 $\chi_k(x)$ 与已經作好了的函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_{k-1}(x)$ 的正交性可依次檢驗。例如:

$$(\chi_2,\varphi_1)=(\psi_2,\varphi_1)-(\psi_2,\varphi_1)(\varphi_1,\varphi_1)=$$
$$=(\psi_2,\varphi_1)-(\psi_2,\varphi_1)=0。$$

既有 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 的正交标准性,得:

$$(\chi_3,\varphi_1)=(\psi_3,\varphi_1)-(\psi_3,\varphi_2)(\varphi_2,\varphi_1)-(\psi_3,\varphi_1)(\varphi_1,\varphi_1)=$$
$$=(\psi_3,\varphi_1)-(\psi_3,\varphi_1)=0,$$

同样也有 $(\chi_3,\varphi_2)=0$ 等等。

还要注意正交标准系的某些其他性質。

設函数系(20)是完备的，且設某連續函数$f(x)$的所有富里埃系数都等于零，換句話說，就是設連續函数$f(x)$与所有函数$\varphi_k(x)$都是正交的：

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx=0,\quad (k=1, 2, \cdots)。$$

完备公式給出：

$$\int_a^b [f(x)]^2dx=0,$$

由于引理，推知$f(x)$恒等于零。

仍然回到一般情况，且設

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \tag{28}$$

是函数$f(x)$的富里埃級数。我們不能肯定級数(28)的收斂性，而且如果它是收斂的，也不能肯定它的和等于$f(x)$。設級数(28)在区間$[a, b]$內是一致收斂的。写出差：

$$f_1(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x),$$

既然設$f(x)$是連續函数，則$f_1(x)$也是連續的。將上等式的兩端乘以$\varphi_p(x)$且取积分，幷由級数的一致收斂性，則可逐項积分，又由于函数系(20)的正交标准性，得：

$$\int_a^b f_1(x)\varphi_p(x)\,dx=\int_a^b f(x)\varphi_p(x)\,dx-c_p。$$

既然c_k都是函数$f(x)$的富里埃系数，則右端的差等于零，因此，若函数$f(x)$的富里埃級数是一致收斂的，則$f(x)$与它的富里埃級数的差$f_1(x)$的所有富里埃系数都等于零。除此以外，如果系(20)是完备的，由于前面所說的，得出下面結論：若系(20)是完备的，且連續函数$f(x)$的富里埃級数在区間$[a, b]$是一致收斂的，則它的和

等于$f(x)$。

还要注意一个基本情况，即正交函数常是綫性無关的。事实上，設有某关系式：

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(x)\equiv 0。$$

將兩端乘以 $\varphi_k(x)\ (k=1,2,\cdots,m)$ 且取积分，由于函数系(20)的正交标准性，我們得 $\alpha_k=0$，亦即所有系数必等于零。

上面所說的一切，可立即推广到实变量 x 的复函数的情形，亦即下面形式的函数

$$\varphi_k(x)=\rho_k(x)+\sigma_k(x)i,\quad (k=1,2,\cdots)。$$

关于这样函数已在前面講过 [III_1; 49]。这时函数系的正交性及标准性被下面的等式表达：

$$(21_1)\qquad \int_a^b \varphi_p(x)\overline{\varphi_q(x)}dx=\begin{cases}0, 当\ p\neq q\ 时；\\ 1, 当\ p=q\ 时，\end{cases}$$

其中 $\bar{\alpha}$ 照例表示 α 的共軛数。任何复連續函数的富里埃系数由下面等式来确定：

$$(22_1)\qquad c_k=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx。$$

在以后各公式中，我們处处以这些值的模的平方来代替原值的平方。于是代替公式(23)的將是下面的公式：

$$(23_1)\quad \int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right|^2dx=\int_a^b|f(x)|^2dx-\sum_{k=1}^n|c_k|^2,$$

而貝塞尔不等式將是：

$$(24_1)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\int_a^b|f(x)|^2dx。$$

完全与前面一样，也可进行正交化手續，只要符号(f,F)由以下等式来定义：

$$(f,F)=\int_a^b f(x)\overline{F(x)}dx。$$

像以前一样,可定义完备性的概念,且可証明前面提到的一切論断。

公式(23_1)完全与公式(23)一样地得以証明。若在积分

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right] \left[\overline{f(x)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^n \bar{c}_k \overline{\varphi_k(x)} \right] dx$$

中,打开括弧且应用(21_1)及(22_1),则得到(23_1)。

注意,若$\omega(x)$是連續复函数,且不恒等于零,则

$$(\omega, \omega) = \int_a^b \omega(x) \overline{\omega(x)} dx = \int_a^b |\omega(x)|^2 dx > 0。$$

积分的通常性質明显地可应用到复函数的积分,如常数因子可放在积分号外,和的积分法等等。

我們回忆,$u_n(x) + v_n(x) i \to u(x) + v(x) i$,亦即$|[u(x) + v(x)i] - [u_n(x) + v_n(x)i]| \to 0$無异于分别單独地有$u_n(x) \to u(x)$及$v_n(x) \to v(x)$ [III$_2$;1]。相似的説明,关于一致收斂性当然也是正确的。对于一致收斂的序列就能够在积分号下取極限[I;145]。积分学中的其余定理,例如,依賴于参数的积分以及在积分号下求积分的定理也保持有效。利用实部及虛部的分离,一切就归到对于实函数相应的定理。

还要注意,布里亞柯夫斯基不等式[III$_1$;29]也可应用到复函数上。

事实上,有[III$_2$;4]:

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |f_1(x)| \, |f_2(x)| dx,$$

从而应用布里亞柯夫斯基不等式于实函数$|f_1(x)|$及$|f_2(x)|$,得:

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |f_1(x)| \, |f_2(x)| dx \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f_1(x)|^2 dx \int_a^b |f_2(x)|^2 dx。$$

上面的一切叙述，都是考虑依赖于一个变量的函数，而这个变量在区間$[a,b]$内变动。所有叙述对于确定在平面上，三維或n維空間內的某有限区域或曲面上的函数都可以逐字地重复一遍。这时，当然必須对于相应的区域取积分。

設P是在平面上，在空間內或曲面上的有限閉区域(亦卽这区域的境界上一切点也包含在內)B內的变点。如果

$$\int_B \varphi_p(P)\overline{\varphi_q(P)}d\omega_P=\begin{cases}0, 当\ p\neq q\ 时;\\ 1, 当\ p=q\ 时,\end{cases}$$

則函数$\varphi_k(P)$(一般地講，是复的)做成正交标准系。此外，虽然我們只写出一个积分符号，但必須認为是二重，三重或曲面积分。用$d\omega_P$記对于变点P取得的相应的积分元素。例如，在笛卡尔坐标中二重积分的情形，我們有$d\omega_P=dx\,dy$。$f(P)$的富里埃系数將是：

$$c_k=\int_B f(P)\overline{\varphi_k(P)}d\omega_P$$

且貝塞尔不等式写为这样：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\int_B|f(P)|^2d\omega_P.$$

若$f(P)$在Q点有跳躍，則代替条件(26)应当假設

$$|f(P)|\leqslant\frac{C}{r^\alpha},$$

其中r是距离$\overline{PQ}$且$\alpha<\frac{n}{2}$，此处对于二重积分或曲面积分的情况$n=2$，而对于三重积分則$n=3$。

4. 弗列德和蒙第二种方程 我們从一个变量的情况着手闡明积分方程及弗列德和蒙第二种积分方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \tag{29}$$

的理論。

我們指出基本假設。我們假設核 $K(s, t)$ 在正方形 k_0 內是兩个变量 (s, t) 的复連續函数，而 k_0 是用不等式：$a \leqslant s \leqslant b, a \leqslant t \leqslant b$ 确定的，且已知函数 $f(s)$ 是在区間 $[a, b]$ 內的复連續函数。寻求的解也屬于連續函数类中。自然要假設核 $K(s, t)$ 在正方形 k_0 內不恒等于零。否則方程(29)变成 $\varphi(s)=f(s)$。

在核的連續性的假設下，当任意选取連續函数 $u(t)$ 时，积分

$$v(s)=\int_a^b K(s, t)u(t)dt \tag{30}$$

給出連續函数 $v(s)$，亦即上式將連續函数 $u(t)$ 变为仍然是連續的函数 $v(s)$。更一般的情况，若設 $u(t)$ 是具有有限个不連續点的有界函数 $(|u(t)| \leqslant C)$，則积分(30)有意义，且可写：

$$v(s+h)-v(s)=\int_a^b [K(s+h, t)-K(s, t)]u(t)dt, \tag{31}$$

从而 $\quad |v(s+h)-v(s)| \leqslant C\int_a^b |K(s+h, t)-K(s, t)|dt$。

由于核的連續性，当 $h \to 0$ 时，右端趋于零，因此也有 $|v(s+h)-$ $-v(s)| \to 0$，亦即 $v(s)$ 是連續函数。于是积分(30)不仅变連續函数为連續函数，而且把有有限个不連續点的有界函数变为連續函数。

应用布里亞柯夫斯基不等式[3]于(31)，得：

$$|v(s+h)-v(s)|^2 \leqslant \int_a^b |K(s+h, t)-K(s, t)|^2 dt \times \tag{32}$$

$$\times \int_a^b |u(t)|^2 dt,$$

由此看出，若 $u(t)$ 在某些点的鄰域內甚至变为無界，然而积分

$$\int_a^b |u(t)|^2 dt$$

有意义[例如 $u(t)$ 满足条件(26)]，則 $v(s)$ 將还是連續函数。

轉到方程(29)且記起关于核 $K(s, t)$ 及自由項 $f(s)$ 的連續性

的假設，例如假設 $\varphi(s)$ 是具有有限个不連續点的有界函数，則由于上面所說的，我們可斷言，式中右端的兩項都是連續的，因而得到 $\varphi(s)$ 也应当是連續函数。这样一来，只求方程(29)的連續解的要求是很自然的。

例如，若設 $K(s, t)$ 是連續的，而 $f(s)$ 是具有有限个不連續点的有界函数，則解 $\varphi(s)$ 自然也是屬于有有限个不連續点的有界函数类中。我們將設 $f(s)$ 是連續的。在数学物理中常遇到核是不連續的情况，我們將迟一些加以研究，暫且还是假設核 $K(s, t)$ 及 $f(s)$ 都是連續的，如上所指出，解 $\varphi(s)$ 也在連續函数类中。

代替方程(29)我們来研究具有参数的方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt。\tag{33}$$

从(33)令 $\lambda=1$，得到方程(29)。我們將認为 λ 不仅可取实数，而且也可以是复数。令 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2 i$。解 $\varphi(s)$ 也应当是复函数的形式 $\varphi(s)=\varphi_1(s)+\varphi_2(s)i$。例如，若 $K(s, t)$ 及 $f(s)$ 都是实的，則代入(33)中且分离实部及虛部，我們得到关于 $\varphi_1(s)$ 及 $\varphi_2(s)$ 的下面的方程組：

$$\varphi_1(s)=f(s)+\lambda_1\int_a^b K(s, t)\varphi_1(t)dt-\lambda_2\int_a^b K(s, t)\varphi_2(t)dt,$$

$$\varphi_2(s)=\lambda_1\int_a^b K(s, t)\varphi_2(t)dt+\lambda_2\int_a^b K(s, t)\varphi_1(t)dt。$$

以后在叙說理論时，我們不采用这个方程組，而是直接研究方程(33)。我們写相应的齐次方程：

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt。\tag{34}$$

它有明显的解 $\varphi(s)\equiv 0$，我們称它为零解。如在[2]中所提到的，若当 $\lambda=\lambda_0$ 时方程(34)有解，且此解不等于零，則称 λ_0 为核 $K(s, t)$ 的或对应积分方程的特征值，而方程

(35) $$\varphi(s)=\lambda_0\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

的一切不为零的解都称为对应于特征值$\lambda=\lambda_0$的特征函数。$\lambda_0=0$显然不是特征值，因为此时由(35)推出$\varphi(s)\equiv 0$。

由于方程(35)是綫性齐次的，若$\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，…，$\varphi_m(s)$是对应于同一个特征值$\lambda=\lambda_0$的特征函数，則从它們做出的系数为复常数的任何綫性組合

(36) $$\varphi(s)=c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)+\cdots+c_m\varphi_m(s)$$

也滿足方程(35)，因此只要公式(36)中的$\varphi(s)$不恒等于零，它就也是特征函数。若$\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，…，$\varphi_m(s)$是綫性無关的，則仅当所有系数c_p都等于零时才有恒等于零的情况。我們以后將指出，对于任一特征值$\lambda=\lambda_0$，存在着这样的有限个綫性無关的特征函数$\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，…，$\varphi_k(s)$，只要賦予系数c_p以一切可能的值，則公式(36)給出方程(35)的一切解。

組成对应于特征值$\lambda=\lambda_0$的特征函数的这种完全組可以有不同方式。假設我們已作出兩个这样的組，第一組由k个函数作成，而第二組由l个函数作成：

$$\varphi_1^{(1)}(s),\varphi_2^{(1)}(s),\cdots,\varphi_k^{(1)}(s);\quad \varphi_1^{(2)}(s),\varphi_2^{(2)}(s)\ \cdots,\varphi_l^{(2)}(s)。$$

如果注意到一切函数$\varphi_p^{(1)}(s)$ $(p=1,2,\cdots,k)$是方程(35)的解，且因而应由第二組的函数綫性表出，而一切函数$\varphi_q^{(2)}(s)$ $(q=1,2,\cdots,l)$恰好同样地应由第一組的函数綫性表出，就容易証明 [**III**$_1$; **10**] $k=l$，亦即特征函数的完全組恒由相同个数的特征函数作成。我們称此数k为特征值λ_0的秩。不同的特征值自然可以有不同的秩。

設核$K(s,t)$及特征值λ_0都是实的，且令$\varphi(s)=\omega_1(s)+\omega_2(s)i$是对应的特征函数；代入(35)并分离实部及虛部，得：

$$\omega_1(s)=\lambda_0\int_a^b K(s,t)\omega_1(t)dt;$$

$$\omega_2(s)=\lambda_0\int_a^b K(s, t)\omega_2(t)\,dt,$$

亦即 $\omega_1(s)$ 及 $\omega_2(s)$ 分别地满足方程(35)，而 $\varphi(s)=\omega_1(s)+\omega_2(s)i$ 是它們的綫性組合。于是当核是实的时，对于实特征值的特征函数可以假設也是实的。

5. 逐次逼近法及解核 应用逐次逼近法到方程(33)

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \tag{33}$$

的求解。为了这样做，我們將寻求这方程的在級数形式下的解，这級数是按照 λ 的正整数增冪排列的:

$$\varphi(s)=\varphi_0(s)+\varphi_1(s)\lambda+\varphi_2(s)\lambda^2+\cdots \tag{37}$$

如果这級数关于在区間 $[a,b]$ 內的 s 是一致收斂的，則在(33)中以它代替 $\varphi(s)$ 后就可逐項积分，且在所得等式的兩端使 λ 的同次冪的系数相等，我們將有逐次确定 $\varphi_n(s)$ 的公式:

$$\begin{gathered}\varphi_0(s)=f(s);\quad \varphi_1(s)=\int_a^b K(s, t)\varphi_0(t)dt;\\ \varphi_2(s)=\int_a^b K(s, t)\varphi_1(t)dt,\end{gathered} \tag{38}$$

且一般地

$$\varphi_n(s)=\int_a^b K(s, t)\varphi_{n-1}(t)dt,\quad (n=1, 2, \cdots), \tag{39}$$

并且由这些公式所确定的一切函数都是連續的 [**4**]。现在証明，如果 λ 的模充分小，則級数(37)关于 s 是絕对且一致收斂的。由此推得，对所指出的 λ，这級数的和是連續函数且它本身就表示方程(33)的解。

在区間 $[a, b]$ 內及在正方形 k_0 內函数 $f(s)$ 及 $K(s, t)$ 是連續的，于是我們有估值:

$$|f(s)|\leqslant m;\quad |K(s, t)|\leqslant M,$$

其中 m 及 M 都是正数，也就是 $|f(s)|$ 及 $|K(s, t)|$ 的最大值。进

行函数 $\varphi_n(s)$的估計，逐次得到：

$$|\varphi_0(s)|\leqslant m;\quad |\varphi_1(s)|\leqslant\int_a^b|K(s,t)||\varphi_0(t)|dt\leqslant$$

$$\leqslant mM\int_a^b dt=mM(b-a),$$

$$|\varphi_2(s)|\leqslant\int_a^b|K(s,t)||\varphi_1(t)|dt\leqslant$$

$$\leqslant mM^2(b-a)\int_a^b dt=mM^2(b-a)^2,$$

且一般地 $$|\varphi_n(s)|\leqslant m[M(b-a)]^n,$$

因此級數(37)的一般項有估計：

$$|\varphi_n(s)\lambda^n|\leqslant m[|\lambda|M(b-a)]^n。$$

从而看出在条件

$$(40)\qquad |\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$$

之下，級数(37)关于 s 是絕对且一致收斂的，且这时它的和是方程(33)的連續解。

所得到的解可写作另一形式，为了这个目的，我們引用所謂叠核，它們是逐次由以下公式确定的：

$$(41)\quad K_1(s,t)=K(s,t);\quad K_n(s,t)=\int_a^b K_{n-1}(s,t_1)K(t_1,t)dt_1。$$

由于基本核 $K(s,t)$的連續性，則每一叠核在正方形 k_0 內都是連續的[II;80]。叠核 $K_n(s,t)$借助于$(n-1)$次积分由基本核 $K(s,t)$表达：

$$K_2(s,t)=\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t)dt_1,$$

$$K_3(s,t)=\int_a^b K_2(s,t_1)K(t_1,t)dt_1=$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t_2)K(t_2,t_1)dt_2\right]K(t_1,t)dt_1。$$

亦即

$$K_3(s, t)=\int_a^b\int_a^b K(s, t_2)K(t_2, t_1)K(t_1, t)dt_1dt_2,$$

且一般地

(42) $$K_n(s, t)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(s, t_{n-1})K(t_{n-1},t_{n-2})\cdots K(t_2, t_1)\times$$
$$\times K(t_1, t)dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}\text{。}$$

在这些公式中，积分的次序是沒有关系的[**II;98**]。

利用这一点，容易得到公式：

(43) $$K_{p+q}(s, t)=\int_a^b K_p(s, \tau)K_q(\tau, t)d\tau\text{。}$$

只須实行 $(p-1)$ 次积分形成 $K_p(s, \tau)$ 及 $(q-1)$ 次积分形成 $K_q(\tau, t)$。剩下的是关于 τ 的單积分。

利用公式(42)及不等式 $|K(s, t)|\leqslant M$，得到在正方形 k_0 内的估計：

(44) $$|K_n(s, t)|\leqslant M^n(b-a)^{n-1},$$

从它推得，在条件(40)之下，級数

(45) $$R(s, t;\lambda)=K_1(s, t)+K_2(s, t)\lambda+K_3(s, t)\lambda^2+\cdots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(s, t)\lambda^n$$

在正方形 k_0 内是絕对且一致收斂的。用 $R(s, t;\lambda)$ 記它的和。

現在直接用自由項 $f(s)$ 来表出函数 $\varphi_n(s)$：

$$\varphi_1(s)=\int_a^b K(s, t)f(t)dt;$$

$$\varphi_2(s)=\int_a^b K(s, t)\varphi_1(t)dt=\int_a^b\int_a^b K(s, t)K(t, t_1)f(t_1)dt_1dt=$$
$$=\int_a^b K_2(s, t_1)f(t_1)dt_1,$$

一般地有 $$\varphi_n(s)=\int_a^b K_n(s, t)f(t)dt\text{。}$$

代入(37),得:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b K_{n+1}(s,t)\lambda^n f(t)dt。$$

若注意級数(45)在正方形 k_0 內的一致收斂性,因而对于区間 $[a, b]$ 內任一固定值 s 它在这区間內关于一个变量 t 更是一致收斂的,則可將和的符号与积分符号交換,且按照(45)的記号,得:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)f(t)dt。\tag{46}$$

这都是在条件(40)之下証明的。

不依賴于自由項 $f(s)$ 的函数 (45) 称为核 $K(s,t)$ 的或方程(33)的解核。不難驗証,如視解核是它自己的第一个变量或第二个变量的函数,則它們滿足下面兩个积分方程:

$$\left\{\begin{aligned} R(s,t;\lambda)&=K(s,t)+\lambda\int_a^b K(s,t_1)R(t_1,t;\lambda)dt_1,\\ R(s,t;\lambda)&=K(s,t)+\lambda\int_a^b K(t_1,t)R(s,t_1;\lambda)dt_1。\end{aligned}\right.\tag{47}$$

例如,为了檢驗第二个方程,將公式(45)的兩端乘以 $K(t,x)$ 且对 t 取积分:

$$\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t,x)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_{n+1}(s,t)K(t,x)dt,$$

或,由于(41):

$$\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t,x)dt=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+2}(s,x)\lambda^n。$$

將兩端乘以 λ:

$$\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t,x)dt=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+2}(s,x)\lambda^{n+1},$$

或者將求和变量 n 改为 $n-1$ 且从 $n=1$ 起求和:

$$\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t,x)dt=\sum_{n=1}^{\infty}K_{n+1}(s,x)\lambda^n。$$

由于(45)可將这等式变作以下形式：

$$\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)K(t,x)dt=R(s,x;\lambda)-K(s,x),$$

这就給出(47)中的第二方程，仅只变量的記号略有不同而已。用相似的方法也可驗証所写出的关于解核的第一个积分方程。

可注意的是，在值 λ 满足不等式

$$|\lambda|<\frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2ds\,dt}}$$

的条件下，可以証明逐次迫近法的收斂性，这个不等式比不等式(40)的限制性更加小一些。以后我們并不利用这个事实。

6. 存在及唯一性定理　到現在为止，我們仅在值 λ 满足条件(40)时定义过解核。以后將見到，在复变量 λ 的全平面上，除了某些孤立点 λ 外，解核是存在的，并且它在 λ 的全平面上满足方程(47)。因此只从方程(47)出發来提供存在及唯一性定理的重要証明：

定理　如果对于某值 λ 存在着在正方形 k_0 内的連續函数 $R(s,t;\lambda)$，它满足方程(47)，則对于这个值 λ 方程(33)有唯一解，且这个解由公式(46)确定。

分为兩部份来証明。第一步証明当(47)满足时方程(33)的一切解应由公式(46)来表达。这就給出唯一性。然后驗証公式(46)确实給出方程(33)的解。

設 $\varphi(s)$ 是方程(33)的某个解。將(33)的兩端乘以 $\lambda R(x,s;\lambda)$ 且对 s 取积分：

$$\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)\varphi(s)ds=$$

$$=\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds+\lambda\int_a^b\left[\int_a^b\lambda R(x,s;\lambda)K(s,t)ds\right]\varphi(t)dt。$$

注意，从(47)的第二方程，我們可写：

$$\lambda\int_a^b R(x, s;\lambda)K(s, t)ds = R(x, t;\lambda) - K(x, t),$$

因而前式可写如形式：

$$\lambda\int_a^b R(x, s; \lambda)\varphi(s)ds = \lambda\int_a^b R(x, s;\lambda)f(s)ds +$$

$$+\lambda\int_a^b R(x, t;\lambda)\varphi(t)dt - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.$$

略去这式左右两端的相同项，且由于(33)：

$$\lambda\int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x) - f(x),$$

就得到公式(46)。

现在証明由公式(46)确定的函数 $\varphi(s)$，当(47)满足时确实满足方程(33)。

將表达式(46)代入方程(33)中，且將一切項都移到左端，得：

$$f(s) + \lambda\int_a^b R(s,t;\lambda) f(t)dt - f(s) -$$

$$-\lambda\int_a^b K(s,t)\left[f(t) + \lambda\int_a^b R(t, t_1; \lambda)f(t_1)dt_1\right]dt = 0$$

或

$$\int_a^b R(s, t;\lambda) f(t)dt -$$

$$-\int_a^b K(s, t) f(t)dt - \lambda\int_a^b\int_a^b K(s, t)R(t, t_1;\lambda)f(t_1)dt\,dt_1 = 0,$$

此式可改写如形式：

$$\int_a^b\Big[R(s, t;\lambda) - K(s, t) -$$

$$-\lambda\int_a^b K(s, t_1)R(t_1, t;\lambda)dt_1\Big]f(t)dt = 0,$$

因为由于(47)的第一方程，方括弧内的式子恒等于零，故这个最后等式确实成立。这样，定理完全証畢。

可注意的，当值 λ 满足条件(40)时，我們曾建立解核满足方程(47)。于是可断言，当值 λ 满足条件(40)时，方程(33)有唯一解且这解被公式(46)表达。这个断言也可以直接証明。

7. 弗列德和蒙分母 我們此刻来建立这样的整函数 $D(\lambda)$，使当級数(45)乘以这个整函数时也得出 λ 的整函数。这样解核就成为以 $D(\lambda)$ 作分母的兩个整函数之商，亦即关于 λ 的兩个冪級数之商，这兩个級数对于一切复值 λ 都是收斂的。换句話說，在复变量 λ 的全平面上解核原来是 λ 的分函数或半純函数。为了建立 $D(\lambda)$，我們以有限項的和代替方程(33)中引入的积分。严格地說来，这样代替是不許可的，但下面的一切計算不是有效的証明，而仅是为了猜測函数 $D(\lambda)$ 的形式。

將区間$[a, b]$分为 n 等份，每一等份的長度是 $\delta=\frac{b-a}{n}$。引入分点的記号及方程(33)中的函数在这些分点处的值的記号，也就是置：

$$s_i=a+i\frac{b-a}{n};\quad f_i=f(s_i);\quad \varphi_i=\varphi(s_i);\quad K_{pq}=K(s_p, s_q),$$

$$(i, p, q=1, 2, \cdots, n)。$$

在方程(33)中用相应的黎曼和代替积分，就有近似等式：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{q=1}^{n}K(s, s_q)\varphi_q\delta。$$

在这等式中用 s_p 代替自变量 s。于是得到关于未知量 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 的 n 个一次方程的方程組：

$$\varphi_p=f_p+\lambda\sum_{q=1}^{n}K_{pq}\varphi_q\delta,\quad (p=1, \cdots, n)。$$

由克拉迈尔定理[III$_1$;8]解这个方程組，將有下面的分母：

$$D_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11}\delta, & -\lambda K_{12}\delta, \cdots, & -\lambda K_{1n}\delta \\ -\lambda K_{21}\delta, & 1-\lambda K_{22}\delta, \cdots, & -\lambda K_{2n}\delta \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\lambda K_{n1}\delta, & -\lambda K_{n2}\delta, \cdots, & 1-\lambda K_{nn}\delta \end{vmatrix}。$$

把下列形式的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}+x, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

的展开公式[見 III$_1$;5]应用到行列式 $D_n(\lambda)$ 上。在上式中令 $x=1$ 及 $a_{ij}=-\lambda K_{ij}\delta$。于是得到：

$$D_n(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\sum_{p_1=1}^{n}K_{p_1p_1}\delta+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{p_1,p_2=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{p_1p_1}, & K_{p_1p_2}\\ K_{p_2p_1}, & K_{p_2p_2}\end{vmatrix}\delta^2+\cdots+$$

(48)

$$+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{p_1,\cdots,p_n=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{p_1p_1}, K_{p_1p_2}, \cdots, K_{p_1p_n}\\ K_{p_2p_1}, K_{p_2p_2}, \cdots, K_{p_2p_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K_{p_np_1}, K_{p_np_2}, \cdots, K_{p_np_n}\end{vmatrix}\delta^n。$$

为了便于以后的計算，我們引用下面的記号：

$$(49)\qquad K\begin{pmatrix}x_1, x_2, \cdots, x_n\\ y_1, y_2, \cdots, y_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1, y_1), K(x_1, y_2), \cdots, K(x_1, y_n)\\ K(x_2, y_1), K(x_2, y_2), \cdots, K(x_2, y_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K(x_n, y_1), K(x_n, y_2), \cdots, K(x_n, y_n)\end{vmatrix}$$

$$(n=1, 2, 3, \cdots)。$$

逐次考察公式(48)的右端的一切項。和：

$$\sum_{p_1=1}^{n}K_{p_1p_1}\delta=\sum_{i=1}^{n}K(x_i, x_i)\delta$$

乃是积分

$$\int_a^b K(t_1, t_1)dt_1$$

的黎曼和，且当 $n\to\infty$ 时它趋于这个积分。完全一样的，和：

$$\sum_{p_1,p_2=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{p_1p_1}, & K_{p_1p_2}\\ K_{p_2p_1}, & K_{p_2p_2}\end{vmatrix}\delta^2$$

也是关于积分

$$\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1, t_1), K(t_1, t_2)\\ K(t_2, t_1), K(t_2, t_2)\end{vmatrix}dt_1dt_2$$

的黎曼和，余依此类推。

于是公式(48)取極限时，自然就导至下面关于 λ 的冪級数：

$$(50)\qquad D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}d_n,$$

其中

$$d_n=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n, \tag{51}$$

且

$$K\begin{pmatrix}t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}$$

按照公式(49)来确定。

我們引出級数(50)所用的方法在理論上是不严格的。在回到严格的理論的叙說时，我們应該証明兩个事实：首先，級数(50)在复变量 λ 的全平面上是收斂的，亦即是 λ 的整函数；其次，將級数(45)乘以級数(50)也得到 λ 的整函数。

进行系数 d_n 的估計。在公式(51)中的积分号下面是 n 級行列式，它的每一元素 $K(t_i, t_k)$ 的模不大于正数 M。应用阿达馬定理[**III**$_1$; **16**]及多重积分通常的估計，得：

$$|d_n|\leqslant n^{\frac{n}{2}}[M(b-a)]^n。$$

因此，級数(50)的一般項的模不超过以下正数：

$$\frac{|\lambda|^n}{n!}n^{\frac{n}{2}}[M(b-a)]^n。 \tag{52}$$

应用达郎貝尔検驗法[**I**; **121**]，我們指出，这些正数作成收斂級数。取后項与前項之比，得：

$$\frac{|\lambda|}{n+1}\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}M(b-a)=\frac{|\lambda|M(b-a)}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}。$$

当 n 趋于無穷大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ 趋于 $\sqrt{e}$ [**I**; **38**]，而写出的比趋于零，从而显出由(52)中的数所作成的級数对于一切值 λ 的收斂性。于是函数(50)是 λ 的整函数。

函数 $D(\lambda)$ 是从克拉迈尔分母取極限得来的。我們自然要假設它是解核 $R(s, t;\lambda)$ 的分母，就是說，將級数(45)乘以 $D(\lambda)$，我

們得到 λ 的整函数。相乘的結果得到一个級数，这級数的項不是像在 $D(\lambda)$ 中一样的数值，而是关于 (s, t) 的函数。对于这个級数引用特別記号：

$$(53) \qquad D(s, t;\lambda) = K(s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(s, t)。$$

(45)及(50)中的兩个冪級数都在圓(40)內收斂。因此由它們相乘起来得到的級数(53)在这圓內也是收斂的。因絕对收斂的冪級数可以逐項相乘，故可將(45)及(50)兩級数直接相乘来求得系数 $d_n(s, t)$ 的表达式，但为了以后便于計算我們从另一方面来进行。將(47)的第一方程的兩端乘以 $D(\lambda)$，得：

$$(54) \quad D(s, t;\lambda) = K(s, t) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(s, t_1) D(t_1, t;\lambda) dt_1。$$

在这公式中用級数(50)及(53)代替 $D(\lambda)$ 及 $D(s, t;\lambda)$ 且使 λ 的同次冪的系数相等，則引出公式：

$$(55) \qquad d_n(s, t) = K(s, t) d_n - n \int_a^b K(s, t_1) d_{n-1}(t_1, t) dt_1$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots),$$

这公式給出逐次計算系数 $d_n(s, t)$ 的可能性，并且須假設 $d_0(s, t) = K(s, t)$。这时应注意，当条件(40)成立时，級数(53)在任何情況下关于 (s, t) 是絕对且一致收斂的，因这时級数(45)与(50)的乘积的項小于作成收斂級数的正数。这就使得我們在公式(54)的右端可逐項积分。在(55)中令 $n=1$，將有：

$$d_1(s, t) = K(s, t) \int_a^b K(t_1, t_1) dt_1 - \int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t) dt_1 =$$

$$= \int_a^b \begin{vmatrix} K(s, t) & K(s, t_1) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) \end{vmatrix} dt_1,$$

注意到記号(49)，也就是：

$$d_1(s, t) = \int_a^b K\begin{pmatrix} s, & t_1 \\ t, & t_1 \end{pmatrix} dt_1。$$

当 $n=2$ 时，公式(55)給出：

$$d_2(s,t)=K(s,t)\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}t_1, & t_2\\ t_1, & t_2\end{pmatrix}dt_1dt_2-$$

$$-2\int_a^b\int_a^b K(s,t_1)K\begin{pmatrix}t_1, & t_2\\ t, & t_2\end{pmatrix}dt_1dt_2。$$

作一个初等变换，我們就得到与上式类似的公式：

$$d_2(s,t)=\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}s, & t_1, & t_2\\ t, & t_1, & t_2\end{pmatrix}dt_1dt_2。$$

我們証明，对于任何正整数 n，有：

$$(56)\qquad d_n(s,t)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}s, & t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t, & t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n。$$

前面我們會証明过，当 $n=1$ 时这式是正确的。用 $d_n^*(s,t)$ 記公式(56)的右端。由于已經說过的，有 $d_1^*(s,t)=d_1(s,t)$。現在要証明，$d_n^*(s,t)$ 也滿足与 $d_n(s,t)$ 同样的关系式：

$$(55_1)\qquad d_n^*(s,t)=K(s,t)d_n-n\int_a^b K(s,t_1)d_{n-1}^*(t_1,t)dt_1。$$

由于(55)及(55_1)，$d_n(s,t)$ 及 $d_n^*(s,t)$ $(n=2,3,\cdots)$ 可相繼地唯一确定，且从 $d_1^*(s,t)=d_1(s,t)$ 得出对于任何 n 有 $d_n^*(s,t)=d_n(s,t)$。于是公式(56)的証明归到关系式(55_1)的証明，其中 $d_n^*(s,t)$ 是(56)式的右端。

首先应注意的是，若在(49)的左端記号中我們將兩个字母 x_i 或兩个字母 y_i 互換，則(49)中的行列式的值只改变符号，因为問題归結到这行列式的兩行或兩列的互換。將公式(56)中引入的行列式按第一行的元素展开，且留心剛才指出的注意，我們可写出：

$$K\begin{pmatrix}s, & t_1, & \cdots, & t_n\\ t, & t_1, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}=K(s,t)K\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_n\\ t_1, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}-$$

$$-K(s,t_1)K\begin{pmatrix}t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t, & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}-K(s,t_2)K\begin{pmatrix}t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t_1, & t, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}-$$

$$-\cdots-K(s,t_n)K\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_{n-1}, & t_n\\ t_1, & \cdots, & t_{n-1}, & t\end{pmatrix}。$$

將这关系式的兩端对一切 t_i 取积分且改变右端积分的变量的記号，也应用上面所作的注意，得到：

$$d_n^*(s,t)=K(s,t)d_n-$$

$$-n\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,t_1)K\begin{pmatrix}t_1, & t_2, & \cdots, & t_n\\ t\ , & t_2, & \cdots, & t_n\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

这就引出关系式(55_1)。于是，公式(56)已得証。应用阿达馬定理到公式(56)中出現的行列式，我們得到下面估值：

$$|d_n(s,t)|\leqslant(n+1)^{\frac{n+1}{2}}M^{n+1}(b-a)^n,$$

从而，完全和(50)一样，我們可以証明級数(53)給出 λ 的整函数，且对于任何 λ 它在正方形 k_0 内关于 (s,t) 是絕对且一致收斂的。

要注意的是，在条件(40)下我們有：

$$R(s,t;\lambda)D(\lambda)=D(s,t;\lambda),$$

对于这些值 λ，可写：

$$R(s,t;\lambda)=\frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{57}$$

这公式的右端給出函数 $R(s,t;\lambda)$ 在复变量 λ 的全平面上的解析延拓，且显示解核是 λ 的分函数。公式(57)中的分母常称为弗列德和蒙分母，应注意的是它不依賴于变量 (s,t)。

从上面所写的公式我們指出某些結論。从(51)及(56)立即推出：

$$d_{n+1}=\int_a^b d_n(s,s)ds。 \tag{58}$$

还要指出簡單地逐次計算系数 d_n 及 $d_n(s,t)$ 的可能性。在公式(58)中令 $n=0$ 且注意 $d_0(s,t)=K(s,t)$，从这公式得到 d_1。然后考察当 $n=1$ 时的公式(55)，从它得到 $d_1(s,t)$，如果我們記得 $d_0=1$ 的話。再在公式(58)中令 $n=1$ 給出 d_2，此后在公式(55)中令 $n=2$ 給出 $d_2(s,t)$，余依此类推。若在公式(53)中令 $t=s$ 且在

兩端对 s 取积分，即由于公式(58)，得：

$$\int_a^b D(s,\ s;\lambda)\,ds=d_1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\,d_{n+1},$$

由于(50)，也就是：

$$D'(\lambda)=-\int_a^b D(s,\ s;\lambda)\,ds。\tag{59}$$

8. 对于任何 λ 的弗列德和蒙方程　我們考察方程(54)。它是从(47)中的第一方程乘 $D(\lambda)$ 后得到的。方程(47)只是在条件(40)下获得的，因之我們可断言，方程(54)的兩端在条件(40)下是相同的。但由于解析延拓的基本原理，若兩个整函数在复变量 λ的平面上的某圓内全同，則它們在复变量的全平面上全同[**III**$_2$; **18**]。將(54)的兩端除以 $D(\lambda)$，可見解核对于不使 $D(\lambda)$ 变为零的任何值 λ 满足(47)中的第一方程。对使 $D(\lambda)=0$ 的那些 λ 值，比式(57)失去意义。恰好一样的，应用解析延拓，我們确信解核对于所提到的一切值 λ 也满足(47)中的第二方程。于是，若 λ 不是$D(\lambda)$的零点，則有(47)中兩个方程的連續解，且应用[**6**]中的存在及唯一性定理，得

定理一　若值 λ 不是 $D(\lambda)$的零点，則对于任何 $f(s)$ 方程(33)有唯一解，且这解由公式(46)来表达，其中$R(s,t;\lambda)$由公式(57)所确定。

現在考察这样的值 $\lambda=\lambda_0$，它是 $D(\lambda)$ 的零点。可能对于任何$(s,\ t)$它也是函数 $D(s,\ t;\ \lambda)$的零点。現在証明这个零点在(57)的分子中的級低于在分母中的級，因而推出 $D(\lambda)$的所有零点都是解核的極点的結論。

定理二　函数 $D(\lambda)$ 的所有零点都是解核的極点。

令 λ_0 是 $D(\lambda)$的 k 級零点，亦即

$$D(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k D_0(\lambda),\quad [D_0(\lambda_0)\neq 0]。$$

設它也是 $D(s, t;\lambda)$的 l 級零点，亦即

$$D(s, t;\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^l D_0(s, t;\lambda),$$

其中 $D_0(s, t; \lambda)$是按照 $(\lambda-\lambda_0)$ 的正整数幂的級数，它的自由項对于某些值 s, t 不为零。我們提醒，导数 $D'(\lambda)$ 有 $\lambda=\lambda_0$ 为它的 $(k-1)$ 級零点。应用公式(59)，得：

$$D'(\lambda)=-(\lambda-\lambda_0)^l\int_a^b D_0(s, s;\lambda)ds。$$

左端有$(k-1)$級零点 $\lambda=\lambda_0$，而右端已經有因子$(\lambda-\lambda_0)^l$，此外，对 s 积分后可能还会出現 $(\lambda-\lambda_0)$ 的正整数幂因子。因此就使我們得出不等式$l\leqslant k-1$，就是說，若$\lambda=\lambda_0$也是表达式(57)的分子的零点，則这零点的級無論如何总小于 k，因此整个分式有極点 $\lambda=\lambda_0$。要注意的是，在 $D_0(s,t;\lambda)$按$(\lambda-\lambda_0)$冪的展开式中，自由項是(s,t)的某函数。这自由项对于某些特别值 s 及 t 可能变为零，但它不恒等于零，因为如果是这样，則 $\lambda=\lambda_0$ 是 $D(s, t;\lambda)$的高于 l 級的零点了。我們能够更正确地表述所証的定理如次：求这样的值 s 及 t，它們使 $\lambda=\lambda_0$ 是解核的極点。

我們已証函数 $D(\lambda)$的一切零点 λ_0 都是解核的極点。設它是 r 級極点。在 $\lambda=\lambda_0$ 点的鄰域内有如下形式的展开式：

$$R(s, t;\lambda)=\frac{a_{-r}(s, t)}{(\lambda-\lambda_0)^r}+\frac{a_{-r+1}(s, t)}{(\lambda-\lambda_0)^{r-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}(s, t)}{\lambda-\lambda_0}+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}a_i(s, t)(\lambda-\lambda_0)^i,$$

其中系数 $a_{-r}(s, t)$ 在 k_0 內不恒等于零。將这个展开式代入 (47) 中的第一方程，兩端乘以$(\lambda-\lambda_0)^r$ 且令 $\lambda=\lambda_0$，得：

$$a_{-r}(s, t)=\lambda_0\int_a^b K(s, t_1)a_{-r}(t_1, t)dt_1。$$

于是，对于变量 t 的任何值，系数 $a_{-r}(s, t)$視作 s 的函数时原来就是齐次方程

$$\varphi(s)=\lambda_0\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt \tag{60}$$

的解。因为函数 $a_{-r}(s,\ t)$ 不恒等于零，于是我們引出下定理：

定理三 若 λ_0 是 $D(\lambda)$ 的零点，则齐次方程(60)有解，且这解不恒等于零。

于是，$D(\lambda)$ 的一切零点都是积分方程的特征值，亦即这时齐次方程

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,\ t)\ \varphi(t)dt \tag{61}$$

有不为零的解。若 λ 不是 $D(\lambda)$ 的零点，则由于定理一，方程(33)对于任何 $f(s)$ 有唯一解，且特别地齐次方程 (61) 此时只有零解。換句話說，若 λ 是 $D(\lambda)$ 的零点，则它是特征值，如果 λ 不是 $D(\lambda)$ 的零点，则它不是特征值。

于是，我們得到：

定理四 积分方程的特征値都是 $D(\lambda)$ 的零点。

在复变量 λ 平面的任何有限区域内，整函数 $D(\lambda)$ 只能有有限个零点，亦即

定理五 在 λ 平面的任何有限区域内只存在有限个特征值。

还指出一个公式，它在应用中常是有用的。設方程(33)中的自由項可表为如下形式

$$f(s)=\int_a^b K(s,\ t)\omega(t)dt, \tag{62}$$

其中 $\omega(t)$ 是某函数。

如果假定 λ 不是特征值，则按方程(46)，得到方程(33)如下形式的解：

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s,\ t)\omega(t)dt+\lambda\int_a^b\int_a^b R(s,\ t;\lambda)K(t,\ t_1)\omega(t_1)dtdt_1。$$

但从(47)中的第二方程給出：

$$\lambda\int_a^b R(s,\ t;\ \lambda)K(t,\ t_1)dt = R(s,\ t_1;\ \lambda) - K(s,\ t_1);$$

把它代入前一式，最后得到对于方程(33)的解的簡單表达式：

$$\varphi(s) = \int_a^b R(s,\ t;\ \lambda)\omega(t)dt, \tag{63}$$

如果方程的自由項是由公式(62)确定的話。

9. 轉置积分方程 为了今后理論的开展，与方程(33)同时將考察另一积分方程，它与方程(33)所不同的就是积分是对于核的第一个变数作成的。用 $g(s)$ 表示这方程的自由項，而用 $\psi(s)$ 表示待求函数：

$$\psi(s) = g(s) + \lambda\int_a^b K(t,\ s)\psi(t)dt. \tag{64}$$

这方程称为(33)的轉置方程。

也写出相应齐次方程：

$$\psi(s) = \lambda\int_a^b K(t,\ s)\psi(t)dt. \tag{65}$$

当核的变量記作以前的記号我們应当用下公式来确定这方程的核：

$$K_0(s,\ t) = K(t,\ s).$$

对于核 $K_0(s,\ t)$ 的記号 (49)，可从 $K(s,\ t)$ 的相同記号中以 y_i 代 x_i 且以 x_i 代 y_i 后得来，亦即

$$K_0\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \cdots, & y_n \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \cdots, & y_n \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \end{pmatrix}.$$

因而公式(51)指出核 $K_0(s,\ t)$ 的系数 d_n 与核 $K(s,\ t)$ 的相同，而由(56)显出核 $K_0(s,\ t)$ 的系数 $d_n(s,\ t)$ 可从核 $K(s,\ t)$ 的类似系数簡單地互换变数 s 及 t 而得到。于是，对于轉置方程 (64)，公式(57)中的分子及分母可用对于方程(33)的分子及分母按以下公式表达：

$$D_0(s, t;\lambda)=D(t, s; \lambda); \quad D_0(\lambda)=D(\lambda),$$

亦即互换变数 s 及 t 得到分子，而轉置方程(64)的弗列德和霍分母与方程(33)的相同。由此可見轉置方程与原来方程有相同的特征值。

在[8]中陈述的所有定理自然对于轉置方程都是正确的。此外，基于上面所說的，可以断言：

定理六 齐次方程(60)与它的轉置方程(65)同时或仅有零解或有不为零的解。

10. 特征值的情况 当 λ 不是特征値时，关于方程(33)的解的問題定理一提供了圓滿的答复。这一节將研究当 λ 是特征値时的情况。

設 λ 是特征值，且設非齐次方程(33)有解 $\varphi(s)$。將(33)的兩端乘以轉置齐次方程(65)的任何解 $\psi(s)$，且对 s 取积分：

$$\int_a^b \varphi(s)\psi(s)ds=\int_a^b f(s)\psi(s)ds+\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(s,t)\psi(s)ds\right]\varphi(t)dt。$$

应用(65)，得：

$$\int_a^b \varphi(s)\psi(s)ds=\int_a^b f(s)\psi(s)ds+\int_a^b \psi(t)\varphi(t)dt,$$

从而

$$\int_a^b f(s)\psi(s)ds=0, \tag{66}$$

亦即方程(33)可解的必要条件是要 $f(s)$ 滿足条件(66)，其中 $\psi(s)$ 是方程(65)的任何解，而(65)的解中一定有异于零的解，因由条件，λ 是特征值。如果 λ 不是特征值，由于定理一，則对于任何 $f(s)$ 方程(33)有解。这就給出

定理七 有兩种可能性：或者对于任何 $f(s)$ 积分方程(33)可解而齐次方程(35)仅有零解，或者齐次方程(35)有不为零的解且不是对于任何 $f(s)$ 方程(33)可解。

在第一种可能性的情况，非齐次方程有唯一解。这可从定理一推知，但也可从下面簡單理由得到：若非齐次方程有兩个相异解，則它們的差是齐次方程的解，这解是不为零的。

注意 若已知对于某值 λ 及某函数 $f(s)$ 非齐次方程(33)有解并且只有一个解，則 λ 不是特征值。事实上，如果 λ 是特征值，則將对应的齐次方程不为零的任何解加到提及的非齐次方程的这唯一的解上，我們就得到非齐次方程的解，它是与所說这唯一的解不同的。

以后我們將見到，条件(66)不仅是方程(33)可解的必要条件而且是充分条件。关于特征值的秩[4]的問題在此須先加以闡明。

設 λ 是特征值，且

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots,\ \varphi_m(s) \tag{67}$$

是任何綫性無关的特征函数，亦即方程(61)的异于零的解：

$$\frac{\varphi_j(s)}{\lambda}=\int_a^b K(s,t)\varphi_j(t)dt,\quad (j=1,2,\cdots,m)。\tag{68}$$

如果 λ 或核不是实的，則(67)中的函数也应認为是复的。我們回忆，$\lambda=0$ 不能是特征值[4]。因为(67)中的特征函数的任意有常系数的綫性組合也是特征函数，我們可应用正交化手續到(67)中的函数。于是，可以假設(67)中的函数是相互正交且标准的，亦即

$$\int_a^b \varphi_p(s)\overline{\varphi_q(s)}ds=0,\ (p\neq q);\quad \int_a^b |\varphi_p(s)|^2 ds=1。\tag{69}$$

轉到共軛值，可改写(68)为以下形式：

$$\frac{\overline{\varphi_j(s)}}{\bar{\lambda}}=\int_a^b \overline{K(s,t)}\,\overline{\varphi_j(t)}dt。$$

由此可見，这等式的左端是 $\overline{K(s,t)}$ 視作变数 t 的函数时关于由有限个函数組成的正交标准系(67)的富里埃系数。由于貝塞尔不等

式[3]可写：

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{|\varphi_j(s)|^2}{|\lambda|^2}\leqslant\int_a^b|K(s,t)|^2dt。$$

应注意的，对于任意复数α，有$|\alpha|=|\bar{\alpha}|$。將这不等式的兩端对s取积分且注意(69)，得：

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{|\lambda|^2}\leqslant\int_a^b\left[\int_a^b|K(s,t)|^2dt\right]ds$$

或
$$\frac{m}{|\lambda|^2}\leqslant\int_a^b\left[\int_a^b|K(s,t)|^2dt\right]ds,$$

从而
$$m\leqslant|\lambda|^2\int_a^b\left[\int_a^b|K(s,t)|^2dt\right]ds,①$$

此外，由于核的連續性，位于右端的积分可能解釋为二重积分。从所写出的不等式推知，对应于特征値λ的綫性無关的特征函數的个數不能大于这不等式的右端的值，亦卽

定理八 任何特征値只有有限个綫性無关的特征函数跟它对应，亦卽任何特征値的秩是有限的。

应注意的，当特征値λ离原点$\lambda=0$愈远时，则由于因子$|\lambda|^2$上述不等式的右端愈大。

設λ是特征値。方程(61)及(65)同时有异于零的解。我們指出这兩个方程的特征値的秩是相同的。

定理九 齐次方程(61)及轉置方程(65)有相同个数綫性無关的解，亦卽它們的同一特征値的秩是相同的。

我們將用反証法。設方程(61)的秩等于m，而方程(65)的秩等于n，且設$m<n$。从这將引出矛盾。設

(70) $$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots,\ \varphi_m(s)$$

① 因当$|\lambda|<\left[\int_a^b\left[\int_a^b|K(s,t)|^2dt\right]ds\right]^{-\frac{1}{2}}=r$时应有$m<1$，则在圜$|\lambda|=r$的內部無特征値，因之級数(37)是收斂的。

是方程(61)的綫性無关的解，且

(71) $$\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \cdots,\ \psi_r(s)$$

是方程(65)的綫性無关的解。像前面一样，可認为(70)及(71)中的函数都已經正交标准化。我們有：

(72) $$\varphi_j(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi_j(t)dt;\quad \psi_j(s)=\lambda\int_a^b K(t,s)\psi_j(t)dt,$$
$$(j=1,2,\cdots,m)。\qquad (j=1,2,\cdots,n)。$$

現在作一新核：

(73) $$L(s,t)=K(s,t)-\sum_{j=1}^{m}\overline{\varphi_j(t)}\,\overline{\psi_j(s)},$$

且写出兩个互为轉置的方程：

(74) $$\varphi(s)=\lambda\int_a^b L(s,t)\varphi(t)dt,$$

(75) $$\psi(s)=\lambda\int_a^b L(t,s)\psi(t)dt。$$

由于(73)我們可將这兩个方程写作如下形式：

(74_1) $$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt-\lambda\sum_{j=1}^{m}\overline{\psi_j(s)}\int_a^b\overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)dt,$$

(75_1) $$\psi(s)=\lambda\int_a^b K(t,s)\psi(t)dt-\lambda\sum_{j=1}^{m}\overline{\varphi_j(s)}\int_a^b\overline{\psi_j(t)}\psi(t)dt。$$

設 $\varphi(s)$ 是方程(74_1)的任一个解。將(74_1)的兩端乘以 $\psi_k(s)$，其中 k 是 $1,2,\cdots,m$ 諸数中的任一个，且对 s 取积分：

$$\int_a^b\varphi(s)\psi_k(s)ds=\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(s,t)\psi_k(s)ds\right]\varphi(t)dt-$$
$$-\lambda\sum_{j=1}^{m}\int_a^b\overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)dt\int_a^b\overline{\psi_j(s)}\psi_k(s)ds。$$

注意到(72)，也注意(71)中的函数的正交性和标准性，可写这等式为以下形式：

$$\int_a^b\varphi(s)\psi_k(s)ds=\int_a^b\psi_k(s)\varphi(s)ds-\lambda\int_a^b\overline{\varphi_k(s)}\varphi(s)ds,$$

从而，由于 $\lambda\neq 0$，推得：

$$\int_a^b \overline{\varphi_k(s)}\varphi(s)ds=0, \quad (k=1,2,\cdots,m)。\tag{76}$$

于是，方程 (74_1) 的一切解满足条件 (76)。但由于这些条件，方程(74_1)可写作如下形式：

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,$$

亦卽方程 (74_1) [也就是 (74)] 的一切解也满足方程 (61)。因之 $\varphi(s)$应表示为(70)中的函数的綫性組合：

$$\varphi(s)=\sum_{j=1}^m c_j\varphi_j(s)。\tag{77}$$

我們証明一切系数 c_j 都应等于零。將(77)的兩端乘以$\overline{\varphi_k(s)}$且对 s 取积分：

$$\int_a^b \varphi(s)\overline{\varphi_k(s)}ds=\sum_{j=1}^m c_j\int_a^b \varphi_j(s)\overline{\varphi_k(s)}ds。$$

应用 (76) 及 (70) 中的函数的正交性及标准性，得 $0=c_k$。于是，从(77)推知 $\varphi(s)\equiv 0$，亦卽齐次方程 (74) 只有零解。另一方面我們証明轉置方程 (75) 有异于零的解。在 (75_1) 中代入 $\psi(s)=\psi_k(s)$，此处 $k>m$。注意(71)中的函数構成正交标准系，得：

$$\psi_k(s)=\lambda\int_a^b K(t,s)\psi_k(t)dt,$$

从而，由于(72)，可見当 $k>m$ 时 $\psi(s)=\psi_k(s)$满足方程(75)。因此，我們得到与定理六相矛盾的結論：方程(74)只有零解，而轉置方程(75)有异于零的解。这样一来，$m<n$ 的情况是不可能的。

同样，可証明 $m>n$ 的情况是不可能的，因此 $m=n$，而定理九得証。

可注意的是，从上面所述推出齐次方程(74)及(75)只有零解，亦卽 λ 不是核 $L(s,t)$的特征值。

現在来講 λ 是特征值时的非齐次方程

(78) $$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt$$

的求解問題。我們已見到对于方程(78)的可解性的必要条件是$f(s)$滿足下面条件：

(79) $$\int_a^b f(s)\psi(s)ds=0,$$

其中$\psi(s)$是方程：

(80) $$\psi(s)=\lambda\int_a^b K(t,\ s)\psi(t)dt$$

的任何解。

現在轉到条件(79)的充分性的証明。設条件(79)已被滿足。按照公式(73)作成核$L(s,\ t)$。我們已經指出λ不是这核的特征值，因而方程

(81) $$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b L(s,\ t)\varphi(t)dt$$

有解。写这方程为如下形式：

(81_1) $$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt-$$
$$-\lambda\sum_{j=1}^m \overline{\psi_j(s)}\int_a^b \overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)dt。$$

也同定理九的証明一样，乘以$\psi_k(s)$且对s取积分，得：

$$\int_a^b \varphi(s)\psi_k(s)ds=\int_a^b f(s)\psi_k(s)ds+\int_a^b \psi_k(s)\varphi(s)ds-$$
$$-\lambda\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)dt,$$

从而，由于(79)，得：

$$\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)dt=0,\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。$$

这样一来，方程(81_1)或者同一方程(81)归結为方程(78)，就是說，方程(81)的解也是方程(78)的解。因此，条件(79)的充分性得

証。

若这条件已被满足，则跟所有非齐次綫性方程的一般情况相同，这方程的一切解被表示为它的任何特解 $\varphi_0(s)$ 及对应齐次方程的通解之和：

$$\varphi(s)=\varphi_0(s)+\sum_{j=1}^{m}c_j\varphi_j(s), \tag{82}$$

其中 c_j 是任意常数。于是，在这情况方程(78)有無穷多的解。借助于核 $L(s, t)$的解核能够作出解 $\varphi_0(s)$。

上面的論証引导出以下定理。

定理十 若 λ 是特征值，则对于方程(78)的可解性的必要且充分条件是，自由项满足条件(79)，其中 $\psi(s)$ 是轉置方程的任何特征函数，亦即方程(80)的任何解。若条件(79)满足，则方程有無穷多的解，而一切这样的解由公式(82)表达。

注意一 在(79)中將 $\psi(s)$代以方程(80)的綫性無关的解的完全組 $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_m(s)$，就足够檢驗条件(79)，因为其他一切解是它們的綫性組合。于是，若条件(79)对 $\psi(s)=\psi_k(s)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$满足，则它对于方程的任何解也满足。

注意二 往往作为轉置齐次方程的不是方程(80)，而是方程

$$\omega(s)=\bar{\lambda}\int_a^b\overline{K(t,s)}\,\omega(t)\,dt。\tag{83}$$

方程(80)及(83)显然有成对的共軛解，亦即若 $\psi(s)$ 是方程(80)的解，则 $\omega(s)=\overline{\psi(s)}$是方程(83)的解，反之也一样。若 λ 是齐次方程

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$$

的特征值，则 $\bar{\lambda}$ 是(83)的特征值，反之也一样。

当这样确定轉置方程时可解条件(79)必須写作如下形式：

$$\int_a^b \overline{\omega(s)} f(s) ds = 0, \tag{84}$$

其中 $\omega(s)$ 是方程(83)的任何解。

在[7]中所指出的工具的基础上我們已証明了一些基本定理，这工具是弗列德和蒙氏在1903年首先給出的。前面我們証明过的一些定理与代数中关于解綫性方程組的一些定理[III$_1$; 8, 9 及 10]是十分相似的。

11. 弗列德和蒙子式 利用前面的討論也可以获得具有核 $K(s,t)$ 的方程的綫性無关的特征函数的完全組，它們是和已給的特征値对应的。我們仅导出結果而不停留在証明上①。应用(49)的記号，我們引进下面这些量：

$$B_n\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_p \\ t_1, \cdots, t_p \end{pmatrix} = \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_p, r_1, \cdots, r_n \\ t_1, \cdots, t_p, r_1, \cdots, r_n \end{pmatrix} dr_1 \cdots dr_n,$$

$$B_0\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_p \\ t_1, \cdots, t_p \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_p \\ t_1, \cdots, t_p \end{pmatrix}。$$

弗列德和蒙 p 級子式定义为級数：

$$D_p(s, t; \lambda) = D\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_p \\ t_1, \cdots, t_p \end{pmatrix}; \lambda \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+p-1}}{n!} B_n\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_p \\ t_1, \cdots, t_p \end{pmatrix}。$$

应注意的是，当 $p=1$ 时，这級数与(53)一致。設 λ_0 是 $D(\lambda)$ 的 r 級零点。考虑下序列

$$D(\lambda_0), D\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}; \lambda_0\Big), D\begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ t_1, t_2 \end{pmatrix}; \lambda_0\Big), \cdots,$$

在这序列中我們求出第一个不恒等于零的項。設

$$D\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_q \\ t_1, \cdots, t_q \end{pmatrix}; \lambda_0\Big) \neq 0。$$

数 q 就是特征值 λ_0 的秩，且可証明它不大于 r，此处 r 是方程 $D(\lambda)=0$ 的根 $\lambda=\lambda_0$ 的重数。若 s_i' 及 t_i' 是变数 s_i 及 t_i 这样的值，它們使数值的不等式：

$$D\begin{pmatrix} s_1', \cdots, s_q' \\ t_1', \cdots, t_q' \end{pmatrix}; \lambda_0\Big) \neq 0$$

成立，則对应于特征值 λ_0 的綫性無关的特征函数的完全組（一般地說，不正交也不标准的）按以下公式确定：

① 参考 И. И. 普利瓦洛夫，积分方程，第61頁。

$$\varphi_k(s)=D\begin{pmatrix} s_1', \cdots, s_{k-1}', s, s_{k+1}', \cdots, s_q'; \lambda_0 \\ t_1', \cdots, t_{k-1}', t_k', t_{k+1}', \cdots, t_q' \end{pmatrix}, (k=1, 2, \cdots, q),$$

而对于轉置方程，这同一特征値將对应于下列特征函数的完全組：

$$\psi_k(s)=D\begin{pmatrix} s_1', \cdots, s_{k-1}', s_k', s_{k+1}', \cdots, s_q'; \lambda_0 \\ t_1', \cdots, t_{k-1}', s, t_{k+1}', \cdots, t_q' \end{pmatrix}, (k=1, 2, \cdots, q)。$$

12. 退化方程 現在我們指出一类积分方程，它的解法归結于一次的代数方程組。如果核 $K(s, t)$ 乃是只为 s 的函数与只为 t 的函数的有限个乘积的和：

$$K(s, t)=\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)\sigma_k(t), \tag{85}$$

則称之为退化核。函数 $\rho_k(s)$ 可認为是綫性無关的，函数 $\sigma_k(t)$ 也同样可認为是綫性無关的。如果有某一 $\rho_p(s)$ 可由其余的 $\rho_k(s)$ 綫性表示，則可將 $\rho_p(s)$ 的这个表达式代入(85)中。这时不过和中的項数減少，而形式仍然不变。

我們考察有这种核的方程和它的轉置方程：

$$\begin{aligned} \varphi(s)&=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt; \\ \psi(s)&=g(s)+\lambda\int_a^b K(t, s)\psi(t)dt。\end{aligned} \tag{86}$$

注意(85)，得：

$$\begin{aligned} \varphi(s)&=f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\rho_k(s)\int_a^b\sigma_k(t)\varphi(t)dt, \\ \psi(s)&=g(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\sigma_k(s)\int_a^b\rho_k(t)\psi(t)dt \end{aligned} \tag{87}$$

或

$$\begin{aligned} \varphi(s)&=f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k\rho_k(s), \\ \psi(s)&=g(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}y_k\sigma_k(s), \end{aligned} \tag{88}$$

其中 x_k 及 y_k 是以下面等式所确定的一些数，

$$x_k=\int_a^b \sigma_k(t)\varphi(t)dt;\quad y_k=\int_a^b \rho_k(t)\psi(t)dt。$$

于是，方程(87)的一切解应有形式(88)，且全部問題归結到求数值 x_k 及 y_k，而不是求函数。

將(88)式代入方程(87)且使綫性無关的函数 $\rho_k(s)$ 及 $\sigma_k(s)$ 的系数相等，得到要确定 x_k 及 y_k 的兩个方程組：

(89₁) $$x_i-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=f_i,$$

(89₂) $$y_i-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{ki}y_k=g_i,$$

其中

(90) $$a_{ik}=\int_a^b \sigma_i(s)\rho_k(s)ds;\ f_i=\int_a^b f(s)\sigma_i(s)ds;$$

$$g_i=\int_a^b g(s)\rho_i(s)ds。$$

方程組 (89₁) 及 (89₂) 兩者的行列式的区别，只在于兩者的行与列互換而已。

例如，若方程組(89₁)的行列式不为零，則对于任何 f_i 我們得到关于 x_i 的确定值。將它們代入(88)，就有 $\varphi(s)$。齐次方程

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt;$$

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b K(t,s)\psi(t)dt$$

將对应于齐次方程組：

(91₁) $$x_i-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=0,$$

(91₂) $$y_i-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{ki}y_k=0,\quad (i=1,2,\cdots,n)。$$

使这兩組中的一組（任何一組都是一样）的行列式等于零，我們得到决定特征值的代数方程。若 $\lambda=\lambda_0$ 是这方程的任何根，則

方程組(91_1)有不为零的解$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，且將它代入公式：

$$(92) \qquad \varphi(s) = \lambda_0 \sum_{k=1}^{n} x_k \rho_k(s),$$

就得到特征函数。

上面所証明的定理在这情形下就归結到綫性代數中的著名定理[**III**$_1$;**8, 9, 10, 15**]。

我們注意，只要所有的数f_i都等于零，也就是，只要：

$$(93) \qquad \int_a^b f(s)\sigma_i(s)ds = 0, \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

那末对于非齐次方程(87)也可以得到齐次方程(91_1)。如果这时λ不是特征值，則方程組(91_1)仅給出零解，且由于(88)，得$\varphi(s) = f(s)$。如果將它代入(87)中并注意(93)，就可立即檢驗这个解。退化核可用來求积分方程的近似解，这就是將所給核代以与它逼近的退化核，然后借助于上面說过的代数工具来解所得的退化方程。求积分方程近似解的这个方法以及其他方法在 Л. В. 康脫若維奇及 В. И. 克雷洛夫著的“高等分析的近似方法”(1950年)一書中已給以闡明。

在叙述积分方程的理論时也利用归結到退化方程的方法。例如，下列各書中曾采用这方法：С. Л. 索伯列夫著“数学物理方程”，И. Г. 彼得罗夫斯基著“积分方程論講义”，柯朗及希尔伯特著“数学物理方法”，卷一。

13. 例 1. 設

$$K(s, t) = \cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t, \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant s \leqslant \pi \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi \end{pmatrix},$$

在这情况下，

$$\rho_1(s) = \sigma_1(s) = \cos s; \quad \rho_2(s) = \sigma_2(s) = i \sin s,$$

且虛因子i只在中間各步計算过程中参加进去。計算a_{ik}，得：

$$a_{11} = \int_0^\pi \cos^2 s \, ds = \frac{\pi}{2}; \quad a_{12} = a_{21} = 0; \quad a_{22} = -\int_0^\pi \sin^2 s \, ds = -\frac{\pi}{2}.$$

方程組(89_1)取以下形式：

$$\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)x_1=f_1;\quad \left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)x_2=f_2\text{。}$$

这样就获得兩个特征值 $\lambda_{1,2}=\pm\frac{2}{\pi}$，且相应的标准特征函数是：

$$\varphi_1(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos s;\quad \varphi_2(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin s\text{。}$$

2．設

$$K(s,\ t)=st+s^2t^2,\quad \begin{pmatrix}-1\leqslant s\leqslant 1\\ -1\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}\text{。}$$

在所給情况 $\rho_1(s)=\sigma_1(s)=s$；$\rho_2(s)=\sigma_2(s)=s^2$，且

$$a_{11}=\frac{2}{3};\quad a_{12}=a_{21}=0;\quad a_{22}=\frac{2}{5}\text{。}$$

这样就获得兩个特征値 $\lambda_1=\frac{3}{2}$ 及 $\lambda_2=\frac{5}{2}$，且对应于它們的特征函数是：

$$\varphi_1(s)=\sqrt{\frac{3}{2}}s;\quad \varphi_2(s)=\sqrt{\frac{5}{2}}s^2\text{。}$$

在上面兩例中核 $K(s,\ t)$ 都是实的且滿足条件 $K(t,\ s)=K(s,\ t)$。这样的核仅有实特征値。

具有对称核的积分方程的理論將在以后叙述。这些方程在数学物理中有广泛的应用。

3．現在給一个有虛特征値的退化实核的例。設

$$K(s,\ t)=s-t,\quad \begin{pmatrix}0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}\text{。}$$

在所給情况下可以認作：

$$\rho_1(s)=s;\ \rho_2(s)=-1;\quad \sigma_1(t)=1;\quad \sigma_2(t)=t,$$

且从而
$$a_{11}=\frac{1}{2};\quad a_{12}=-1;\quad a_{21}=\frac{1}{3};\quad a_{22}=-\frac{1}{2}\text{。}$$

为了决定特征值得到方程

$$\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}\lambda & \lambda\\ -\frac{1}{3}\lambda & 1+\frac{1}{2}\lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{12}\lambda^2+1=0,$$

它有純虛根。在所引的例子中实核滿足条件 $K(t,\ s)=-K(s,\ t)$。

这样的斜对称核仅有純虛数的特征值。

4. 还給一个沒有特征值的退化核的例。設

$$K(s,\ t)=\sin s\sin 2t,\quad \begin{pmatrix}0\leqslant s\leqslant\pi\\ 0\leqslant t\leqslant\pi\end{pmatrix}。$$

在所給情况 $n=1$ 且唯一的元素 a_{ik} 將是：

$$a_{11}=\int_0^{\pi}\sin s\sin 2s\,ds=0。$$

齐次方程組 (91_1) 及 (91_2) 給出 $x_1=y_1=0$，因而齐次方程对于任何 λ 只有零解。給出特征值的方程在这情况变为荒謬的等式：$1=0$。

14. 得到的結果的推广 在积分方程理論的叙述中，我們曾假設待求函数 $\varphi(s)$ 及自由項 $f(s)$ 都是一个自变量的函数，这个变量在某区間 $[a,\ b]$ 内变化。这区間也是核 $K(s,\ t)$ 的兩个变量的变化区間。如果我們假設函数 $\varphi(M)$ 及 $f(M)$ 都是任意維某有限区域 B 內或某曲面上或某曲綫上的点的函数，一切理論都完全保持不变。这时，核 $K(M,\ N)$ 將是一对点 M 及 N 的函数，它們之中的每一个点是在所提到的区域內或曲面上或曲綫上变动，且在积分方程中的积分符号应当了解是展布在所提到的区域內或曲面上或曲綫上的积分，因而积分方程写为以下形式：

$$\varphi(M)=f(M)+\int_B K(M;N)\varphi(N)d\omega_N。\tag{94}$$

我們只写出一个积分符号，但必須記住这积分可以是对于在所提到区域的多重积分，且 $d\omega_N$ 記为这区域的面积或体积元素或曲綫的弧素。例如，若变动区域是在平面 $(x,\ y)$ 上某有限区域 B，則在坐标系內方程(94)可写作下面的形式：

$$\varphi(x,\ y)=f(x,\ y)+\iint_B K(x,\ y;\xi,\ \eta)\varphi(\xi,\ \eta)d\xi d\eta。$$

我們將假設函数 $f(M)$ 在閉区域 B 內是連續的，且求在这区域內为連續的解 $\varphi(M)$。核 $K(M,\ N)$ 設为一对点 $(M,\ N)$ 的連續函数，并且每个点在閉区域 B 內变动。

現在考察关于m个待求函数的m个方程的方程組：

$$\varphi_i(s)=f_i(s)+\int_a^b\sum_{j=1}^m K_{ij}(s,t)\varphi_j(t)dt,\quad (i=1,2,\cdots,m)。$$

在这情况，代替核的是函数$K_{ij}(s,t)$組成的矩陣。

不难把写出的方程組归結到有一个待求函数的一个积分方程。为了使記号不过于复杂，設$m=2$：

$$(95)\quad \begin{aligned}\varphi_1(s)&=f_1(s)+\int_a^b[K_{11}(s,t)\varphi_1(t)+K_{12}(s,t)\varphi_2(t)]dt,\\ \varphi_2(s)&=f_2(s)+\int_a^b[K_{21}(s,t)\varphi_1(t)+K_{22}(s,t)\varphi_2(t)]dt。\end{aligned}$$

前面已說过，若基本区域不是区間，而是在平面上，在曲面上或在空間内的任意有限区域，积分方程的一切理論仍旧是不变的。也能够假設变点跑过的不是一个綫段或一个区域，而是几个分离的綫段或区域。一切理論这时是完全不变的。为了使方程組(95)归結到一个方程，把取兩次的区間$[a,b]$作为基本区域，或是換句話說，我們取兩份区間$[a,b]$作为基本区域。这兩份相互間無联系。我們認为，如果点M在第一份上則$f(M)=f_1(M)$，如果点M在第二份上則$f(M)=f_2(M)$。相似地用$\varphi_1(M)$及$\varphi_2(M)$确定$\varphi(M)$。核$K(M,N)$按以下方式确定：

(96)

$K(M,N)=K_{11}(M,N)$ （M及N皆在第一份上）　$K(M,N)=K_{12}(M,N)$ （M在第一份上；N在第二份上）

$K(M,N)=K_{21}(M,N)$ （M在第二份上；N在第一份上）　$K(M,N)=K_{22}(M,N)$ （M及N皆在第二份上）

这时方程組(95)归結到有連續核的一个积分方程，基本区域J是由兩份綫段$[a,b]$作成的：

$$(97)\qquad \varphi(M)=f(M)+\int_J K(M,N)\varphi(N)d\omega_N。$$

积分是对两份区間$[a,b]$都取的，并且設$d\omega_N=dx$。

当对核所設的条件比連續性还要广泛时，上面講的理論也仍旧是正确的。例如，設核 $K(s, t)$ 有有限个不連續点及不連續綫，但在正方形 k_0 內仍是有界的，且存在这样的数 N，对于任何固定值 $s=s_0$，在綫段 $s=s_0(a\leqslant t\leqslant b)$ 上最多有 N 个点，$K(s, t)$ 在这些点处不是关于两个变量的連續函数。

不难証明，这时，只要 $h(t)$ 是有有限个不連續点的有界函数，积分

$$(98) \qquad \omega(s)=\int_a^b K(s, t)h(t)dt$$

就确定了 s 的連續函数。为簡單起見，將假設核的一切不連續点都在正方形的对角綫 $t=s$ 上。注意，由条件，$|h(t)|\leqslant m$，此处 m 是某正数，則可写：

$$(99) \qquad |\omega(s)-\omega(s')|\leqslant m\int_a^b |K(s, t)-K(s', t)|dt。$$

由于积分号下的函数的有界性，对于任意給定的正数 ε，存在这样正数 δ，使写出的积分沿区間 $[s-\delta, s+\delta]$ 的值小于 ε。設 s' 是在这区間的內部。当沿着其余区間 $[a, s-\delta]$ 及 $[s+\delta, b]$ 取积分，則积分号下的函数將是兩变量 s' 及 t 的連續函数，且因之对于充分接近于 s 的一切值 s'，沿着提到的兩区間的积分也都是小于 ε。由此可見，对于充分接近于 s 的一切值 s'，不等式 (99) 的左端將小于 $3m\varepsilon$，而由于 ε 的任意性，这就給出函数 $\omega(s)$ 的連續性。按类似方式可以証明，若 $K'(s, t)$ 及 $K''(s, t)$ 是滿足前面提到的条件的兩个核，則函数

$$K'''(s, t)=\int_a^b K''(s, t_1)K'(t_1, t)dt_1$$

將是它自己的兩个变量的連續函数。于是，若核 $K(s, t)$ 滿足前面指出的条件，則二次叠核已經是連續的。不难看出，在作出关于核的这样假設时，方程的一切理論在証明中不需要任何改变都是保

持的。

还要注意，在$f(s)$的連續性的条件下，如果我們求有有限个不連續点的有界解，則从上面証明了的积分(98)的連續性，由于方程本身，已經显示出这个解也应是連續的[参閱4]。

我們注意，在証明基本定理时对于累次积分必須更換积分次序。在前面所作的关于核的假設下这种更換是合法的。在帶有多重积分的积分方程理論中，一切叙述也是正确的。这时在对角綫$s=t$上的不連續性对应于当兩点M及N重合时核$K(M, N)$的不連續性。

如果核是無界的，則問題变得更加复杂。但在数学物理中应用积分方程时，經常碰到的正是这样的核。重要的是选取这样的無界核，使前面所証明的关于連續核的一些定理对于它也保持正确。現在我們就进行这方面的討論。

15. 选擇原理 在这一段和下一段中我們叙述所謂选擇原理，它对以后积分方程理論的叙述是必要的。

設有某实数無穷集合$\mathfrak{E}$，且这些数的絕对值不大于某个确定正数。我們知道，从屬于$\mathfrak{E}$的任何無穷数列a_n中可以选擇有極限的子数列a_{n_k}[II;89]。对于$\mathfrak{E}$的任何無限部份集合自然也可以作同样的选擇。这个断言称为对于实数集合的选擇原理，而这些数的絕对值不大于同一个正数。同样的选擇原理对于复数集合也成立，而这些复数的模不大于同一个正数。为了証明这个事实，只要首先对于$\mathfrak{E}$中各数的实部应用选擇原理，然后对于所得到的数列的虛部应用选擇原理。我們的問題是要解决：在怎样情况下选擇原理对于函数集合成立，并且我們只考慮一致收斂于極限函数的函数列。为了解决指出的問題，我們需要一系列新的概念及补充說明。

設有任何客体(元素)的無限集合。若这集合中的所有客体都

可能这样标以正整数的号碼，使每一正整数对应于集合的一个客体，且反之，集合中每一客体对应于一个确定正整数，則謂这集合是可列的。

換句話說，如果集合中的客体可能表如序列形式：$u_1, u_2, u_3, \cdots$，則这集合是可列的。下面給出一个重要的例子，即是指出一切实有理数的集合是可列集合。將一切正有理数照这样次序排列，使分子及分母的和不減少且使分母在所提到的和有同一值的那些有理数群中是增加的。我們將写出既約分数。于是，得到数列：

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \cdots。$$

把已在前面出現过的那些数去掉，我們得到含有一切正有理数的数列：

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ 5,\ \cdots。$$

于是，每一正有理数各得一个号碼，这就是它在写出的数列中所占位置的号碼。一切实有理数也構成可列集合。事实上，我們取零为第一数，然后在上面写出的数列中的每一数后补入符号相反的数：

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 3,\ -3,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \cdots。$$

如果从任何序列 $u_1, u_2, \cdots$ 中删除它的某些项，但使余下的有無穷个項，則余下的項仍然構成無穷序列 $u_{n_1}, u_{n_2}, \cdots$，且也可标以号碼。由此可見，可列集合的任何含有無穷个元素的部份集合也是可列集合。

例如，屬于任何区間 $[a, b]$ 的有理数集合也是可列集合。

我們看出，在 x 軸的任何任意小的固定区間上可找到無穷多的有理数，或者說，分布在 x 軸上的有理数是遍密的。

任何有理数对于大小来説沒有次一个数，且在上面構成的有理数列中不是按增加或减少的次序来排列的。

可以証明，从区間 $[a, b]$ 内的所有实数構成的集合不是可列的。

現在考察对于 XY 坐标平面上的某区域 B。我們証明，B 中的兩个坐标 (x, y) 都是有理数的点所成的集合是可列的。

例如，首先可以把具有有理坐标的所有点 $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ 标以号碼。因为有理数可标以号碼，則具有有理坐标的点能够写作形式 (u_m, v_n)，$(m, n=1, 2, \cdots)$。这些数偶可以按下标的和及在同和时按第一下标的增加次序排列：

$(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_1), (u_1, v_3), (u_2, v_2), (u_3, v_1), \cdots$。

屬于区域 B 的具有有理坐标的点集合 $\mathfrak{C}$ 是可列集合的無限部份集合，故也是可列集合。这集合 $\mathfrak{C}$ 在 B 内是遍密的，亦卽以屬于 B 的点作中心的任何圓内，可找到 $\mathfrak{C}$ 中的無限多个点。完全类似地可以証明，屬于 n 維空間的任何区域 B 的有理坐标点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合是可列的，且在 B 内是遍密的。

要証明在曲面 S 上存在可列且遍密的点集，例如，只須將曲面划分为有限塊，如果取每一塊上某点的切面作为 XY 平面，則每塊有显式方程 $z=f(x, y)$。这时，例如，如果取切面上具有有理坐标 (x, y) 的点，則在任何塊上可获得可列且遍密的点集。設塊数是 p。在每一塊上我們有遍密点序列：

$$a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, a_3^{(s)}, \cdots, \quad (s=1, 2, \cdots, p)。$$

我們可將它們排列为一个序列

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \cdots, a_1^{(p)}, a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_2^{(p)}, \cdots,$$

如果某些点重合的話，則在序列中删去这些点。从中心在 S 上的任何球内可找到曲面的上述点的可列無限集合。現在証明下面引理。

引理 設在区間$[a, b]$上确定某函数列$f_n(x)$，且它們的模不大于同一数L，則对于$[a, b]$中任何可列点集合$x_k (k=1, 2, \cdots)$，从函数列$f_n(x)$中可以选擇一个子序列，使它在这可列集合中每点是收斂的。

按定理的条件$|f_n(x)| \leqslant L (n=1, 2, \cdots)$，且可从数列$f_n(x_1)$选出收斂子数列，亦即从函数列$f_n(x)$中可能选出子函数列

(I) $$f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x), f_3^{(1)}(x), \cdots,$$

它在点$x=x_1$是收斂的。如对于函数（I）令$x=x_2$，則得到数列$f_k^{(1)}(x_2)$，它們的模也不大于L。因此从函数列（I）中可能选出这样子函数列

(II) $$f_1^{(2)}(x), f_2^{(2)}(x), f_3^{(2)}(x), \cdots,$$

使它不仅在点$x=x_1$收斂[因为它是从（I）中选出的，而（I）在$x=x_1$时是收斂的]，并且在点$x=x_2$也是收斂的。置$x=x_3$，并注意，一切数$f_k^{(2)}(x_3)$的模都小于或等于L，于是从序列(II)中可再选出子函数列

(III) $$f_1^{(3)}(x), f_2^{(3)}(x), f_3^{(3)}(x), \cdots,$$

使它在$x=x_1$, $x=x_2$及$x=x_3$諸点收斂。繼續上面的作法，一般就会得到函数列

(m) $$f_1^{(m)}(x), f_2^{(m)}(x), f_3^{(m)}(x), \cdots, \quad (m=1, 2, 3, \cdots),$$

使它在$x=x_1$, $x=x_2, \cdots, x=x_m$諸点收斂。現在構成一个新序列，它是从（I）中取第一函数，从(II)中取第二函数，从(III)中取第三函数等等而構成的：

$$f^{(1)}(x)=f_1^{(1)}(x), f^{(2)}(x)=f_2^{(2)}(x), f^{(3)}(x)=f_3^{(3)}(x), \cdots,$$

(*)

$$f^{(n)}(x)=f_n^{(n)}(x), \cdots。$$

我們証明，这个序列已經在任何点$x=x_k$收斂。事实上，任取某点$x=x_k$。按照上述作法，序列(*)中从$m=k$开始，亦即一切函数

(**)　　$f^{(k)}(x)=f_k^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x)=f_{k+1}^{(k+1)}(x),\cdots,$

構成在 $m=k$ 时的序列(m)的子序列，因之在子序列(**)中代入数值 $x=x_k$，我們得到收斂序列，亦卽函数列(**)在点 $x=x_k$ 收斂。对于序列(*)也可同样地肯定，于是引理得証。在証明引理时所采用的，構成在一切点 $x=x_k$ 收斂的函数列的方法，称为对角綫法。它自然不是構造手續而仅有純理論的价值。

所指的証明無論对于实函数或对于复函数 $f_n(x)$ 都适用的。也可逐字逐句地对于确定在 m 維空間的任何区域 B 内或在曲面上的函数 $f_n(P)$ 照样来証明这个引理。

16．选擇原理(續)　設 $f(x)$ 是在有限区間 $[a, b]$ 上的連續函数。我們知道它是一致連續的，亦卽，对于任給正数 ε，存在这样正数 η，对于区間 $[a, b]$ 内使 $|x'-x''|\leqslant\eta$ 的任意兩点 x' 及 x''，有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon$。对于在区間 $[a, b]$ 内为連續的不同函数，当 ε 是已給时，一般地講，將有不同的 η。若有有限个連續函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$，則对于已給的 ε，在对应正数 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 的中間將有最小数。記它为 η'。这时可断言，只要 $|x'-x''|\leqslant\leqslant\eta'$，則当 $k=1, 2, \cdots, m$ 时，有 $|f_k(x')-f_k(x'')|\leqslant\varepsilon$。但如果有連續函数 $f(x)$ 的無限集合 $\mathfrak{E}$，則在对应的正数 η 中可能沒有最小数。此外，对于已給的 ε 这些正数或許会無限逼近于零。这时不能对于 $\mathfrak{E}$ 中的所有函数 $f(x)$ 选擇同一数 η'。例如，$f_n(x)=\sin nx$ $(n=1, 2, \cdots)$，对于已給 ε，当 n 無穷增大时，数 η 显然趋于零。这可从这样事实立卽推出，卽当自变量 x 的增量为 δ，正弦的幅角要改变 $n\delta$。

定义　設函数集合 $\mathfrak{E}$ 中的 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 内是連續的，若对于任給正数 ε，对于 $\mathfrak{E}$ 中的所有函数存在同一个这样正数 η，在区間 $[a, b]$ 内使 $|x'-x''|\leqslant\eta$ 的值 x' 及 x''，有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant\leqslant\varepsilon$，則称 $\mathfrak{E}$ 是等度連續函数集合。

函数的等度連續性及模不大于同一数的有界性，使我們有証明选擇原理的可能，而且在所給情况，收斂性了解为在$[a, b]$内的一致收斂性，亦即成立下面定理：

定理一 若 $\mathfrak{C}$ 是函数 $f(x)$ 的集合，它在有限閉区間$[a,b]$上是等度連續的，且所有这些函数的模不大于同一数 L，亦即$|f(x)|\leqslant L$，則从屬于 $\mathfrak{C}$ 的任何函数列中可以选擇子函数列，使这子函数列在$[a, b]$上一致收斂。

設有 $\mathfrak{C}$ 中的某函数列。应用引理，我們可斷言，从这函数列中可以取出子函数列，使这子函数列在$[a,b]$上的某可列且遍密集合的一切点 x_k 是收斂的。例如，这是在$[a, b]$内的有有理坐标的一切点。設

$$(*)\qquad f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots$$

是从 $\mathfrak{C}$ 中的函数列选擇出来的子函数列，它在上面提到的一切点 $x_k (k=1,2,3,\cdots)$ 是收斂的。我們証明，这函数列在整个区間$[a,b]$上是一致收斂的。作差 $f_p(x)-f_q(x)$ 且把它表示为形式

$$(\alpha)\qquad f_p(x)-f_q(x)=[f_p(x)-f_p(x')]+[f_p(x')-f_q(x')]+ \\ +[f_q(x')-f_q(x)],$$

其中 x' 是上面提到的在$[a, b]$上遍密的点集合中的任一点。設 ε 是任給正数且 η 是等度連續定义中引入的对应数。取一由 x_k 中的点所構成的有限点集 τ'，使这有限集合中的諸点將$[a, b]$分为有限个部份区間，且每一部份区間的長度 $\leqslant\eta$。这显然是可能的，因为一切点 x_k 的集合在$[a, b]$上是遍密的。在有限点集合 τ' 的每一点函数列$(*)$有極限。因此存在这样的数 N，若 x' 是上面提到的有限点集合 τ' 中的任一点，就有

$$(\beta)\qquad |f_p(x')-f_q(x')|<\varepsilon,\quad 当\ p\ 及\ q>N\ 时。$$

我們認为出現在公式(α)中的点 x' 是有限集合 τ' 中的一点，且写出不等式

$$(\gamma)\qquad |f_p(x)-f_q(x)|\leqslant|f_p(x)-f_p(x')|+|f_p(x')-f_q(x')|+ \\ +|f_q(x')-f_q(x)|,$$

它可直接从(α)推得。对于在$[a, b]$上任何点x，可定出屬于τ'的这样点x'，使对于任一n，有$|f_n(x)-f_n(x')|<\varepsilon$。这个$x'$是$x$点所在的部份区間的兩端点之一。此外，当$p$及$q>N$时，对于屬于$\tau'$的任何$x'$有不等式($\beta$)。于是，由于($\gamma$)，我們可断言如下：对于任給正数$\varepsilon$，存在这样数$N$，不依賴于$x$的，当$p$及$q>N$时及$[a, b]$上的任何$x$，使$|f_p(x)-f_q(x)|<3\varepsilon$，这就指出函数列(*)在整个区間$[a, b]$上是一致收斂的，因而定理得証。

这証明無論对于实函数或复函数都显然适用。如果我們已知等度連續的函数列$f_n(x)$在$[a, b]$内的一切点或在$[a, b]$内为遍密的某个点集合x_k是收斂的，則沒有必要选出在一切点x_k收斂的子函数列，且可能作出下面断言：

定理二　若在$[a, b]$上是等度連續的函数列$f_1(x), f_2(x), \cdots$在这区間內的一切点(或甚至仅在某个在$[a, b]$上遍密的点集合的各点x_k)是收斂的，則这函数列在$[a, b]$上一致收斂。

証明的定理可逐字逐句地轉移到函数$f(P)$的集合$\mathfrak{C}$的情况，这集合中的函数定义在n維空間的某閉区域B上或是在曲面上。在这里等度連續性显然这样定义：当任意給定正数ε时，对于$\mathfrak{C}$中的所有函数存在同一个这样正数η，只要P及Q是屬于B的任何兩点且距离$|PQ|\leqslant\eta$，就有$|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$。区域B是閉的意味着对这区域要添上它的境界[II; 83]。就是在B由几个分离的閉区域構成的情况下，証明無須改变，仍旧有效。

17. 無界核　如果核是無界的，前面所証明的关于积分方程的一些定理就可能不正确。可是在某些附加条件下，定理对于無界核就也保持正确了。现在我們挑出这样一类無界核。关于含有無界核的情形以及积分区域是無穷大的情形的积分方程的一般理

論將于卷五中闡明，它是以更广泛的积分概念（勒貝格积分）作基礎的。为确定起見，我們將对平面情况加以闡述。要轉到对于任何 n 維空間或对于曲面的积分的情形完全沒有困难。

我們假設核 $K(M;N)$ 只在点 M 及 N 重合时变为無穷大。正是这种类型的核經常在数学物理中碰到。

因此，考察下形式的核：

$$K(M;N)=\frac{L(M;N)}{r^{\alpha}}, \tag{100}$$

其中 $L(M;N)$ 是在有限閉区域 B 中的一对点 $(M;N)$ 的連續函数，r 是兩点 M 及 N 間的距离，且数 α 满足条件 $0<\alpha<2$。这类型的核將称为極性核。从(100)得到估計

$$|K(M;N)|\leqslant\frac{C}{r^{\alpha}}, \tag{101}$$

其中 C 是某常数。我們預先确定極性核的某些性質。今后字母 B 將表示閉区域。

設 d 是 B 的直徑，也就是，B 中点与点間的最大距离[**II;89**]。区域 B 含在以 B 的任何点 M 作中心而以 d 作半徑的圓內，因而有估計

$$\int_B|K(M;N)|d\omega_N\leqslant\int_{r\leqslant d}\frac{C}{r^{\alpha}}\,d\omega_N=\frac{2\pi C}{2-\alpha}\,d^{2-\alpha},$$

亦即

$$\int_B|K(M;N)|d\omega_N\leqslant D, \tag{102}$$

其中 $D=\dfrac{2\pi C}{2-\alpha}d^{2-\alpha}$。

設 $u(N)$ 是在 B 內某連續函数，且

$$v(M)=\int_B K(M;N)u(N)d\omega_N. \tag{103}$$

由于(100)，所写的积分显然有意义。我們証明函数 $v(M)$ 的

連續性：

$$v(M')-v(M)=\int_B [K(M';N)-K(M;N)]u(N)d\omega_N。$$

对于連續函数 $u(N)$ 在 B 中有估計：

$$|u(N)|\leqslant C_1, \tag{104}$$

其中 C_1 是常数。其次，

$$|v(M')-v(M)|\leqslant C_1\int_B |K(M';N)-K(M;N)|d\omega_N。 \tag{105}$$

以后將用 ω_ρ 及 ω'_ρ 記以 M 及 M' 为心且半徑为 ρ 的兩圓。設 δ 是某一小正数，它將在以后选择。作出圓 $\omega_{2\delta}$，且設 B_δ 是区域 B 屬于圓 $\omega_{2\delta}$ 的部份，而 B_δ' 是 B 在圓 $\omega_{2\delta}$ 外面的部份。可写：

$$\int_B |K(M';N)-K(M;N)|d\omega_N=\int_{B_\delta} |K(M';N)- \tag{106}$$

$$-K(M;N)|d\omega_N+\int_{B_\delta'}|K(M';N)-K(M;N)|d\omega_N。$$

由于(101)則有估計：

$$\int_{B_\delta}|K(M';N)-K(M;N)|d\omega_N\leqslant C\int_{\omega_{2\delta}}\frac{1}{r'^\alpha}\,d\omega_N+$$

$$+C\int_{\omega_{2\delta}}\frac{1}{r^\alpha}\,d\omega_N,$$

其中 r' 是 M' 及 N 兩点間的距离。假設 M 及 M' 兩点間的距离小于 δ。这时圓 $\omega_{2\delta}$ 显然位置在圓 $\omega'_{3\delta}$ 的內部，因此

$$\int_{B_\delta}|K(M';N)-K(M;N)|d\omega_N\leqslant C\int_{\omega_{2\delta}}\frac{1}{r^\alpha}\,d\omega_N+$$

$$+C\int_{\omega'_{3\delta}}\frac{1}{r'^\alpha}\,d\omega_N。$$

在各圓內引进極坐标且計算积分，得：

$$\int_{B_\delta}|K(M';N)-K(M;N)|d\omega_N\leqslant\frac{2\pi C}{2-\alpha}[(2\delta)^{2-\alpha}+ \tag{107}$$

$$+(3\delta)^{2-\alpha}]。$$

設 ε 是任給正数。規定 δ 是这样的小，使(107)的右端將 $\leqslant \frac{\varepsilon}{2C_1}$。

現在来考察公式(106)中的第二項。若 M' 点在閉圓 ω_δ 內且 N 点在閉区域 B_δ 內，則 r 及 $r' \geqslant \delta$，且

$$|K(M';N)-K(M;N)|=\frac{|r^{\alpha}L(M';N)-r'^{\alpha}L(M;N)|}{r^{\alpha}r'^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|L_1(M',M;N)|}{\delta^{2\alpha}},$$

其中 $L_1(M',M;N)$ 是在 B 內的 M', M 及 N 的連續函数，当 M 及 M' 兩点重合时它等于零。由此推得，存在这样正数 η，它不因 M 点的位置而变且可認为它不大于 δ，若距离 $|MM'|$ 不大于 η，就有

$$(108)\qquad \int_{B_\delta}|K(M';N)-K(M;N)|\,d\omega_N \leqslant \frac{\varepsilon}{2C_1}。$$

注意(107)，得到：若 $|MM'|\leqslant\eta$，則

$$|v(M')-v(M)|\leqslant\varepsilon,$$

这就証明了 $v(M)$ 在 B 內的連續性。还要指出，数 η 仅与 ε 及 C_1 有关，但不依賴于 $u(N)$ 的具体选擇，亦即对于滿足条件(104)的所有函数 $u(N)$，当 C_1 固定时，我們得到等度連續函数族 $v(M)$。

从(102)，(103)及(104)立即推出下面估計：

$$|v(M)|\leqslant C_1D。$$

于是，我們得到以下結果：

引理一 公式(103)將連續函数 $u(N)$ 变为連續函数 $v(M)$。如果函数 $u(N)$ 的模不大于同一数 C_1，則得到一类等度連續函数 $v(M)$，这类函数的模也不大于同一数。

引进在一定意义下迫近于核 $K(M;N)$ 的連續核 $K_\gamma(M;N)$，也就是設：

$$(109)\qquad K_\gamma(M;N)=\begin{cases} K(M;N), & \text{当 } r\geqslant\gamma;\\ \dfrac{L(M;N)}{\gamma^{\alpha}}, & \text{当 } r\leqslant\gamma,\end{cases}$$

其中 γ 是任何正数。只当 $r<\gamma$ 时核 $K_\gamma(M;N)$ 与核 $K(M;N)$ 有所不同且 $|K_\gamma(M;N)|\leqslant|K(M;N)|$，因而由于(101)，有

$$|K_\gamma(M;N)|\leqslant\frac{C}{r^\alpha};\tag{110$_1$}$$

$$\int_B|K_\gamma(M;N)|d\omega_N\leqslant D。\tag{110$_2$}$$

与变换(103)同时来考察变换

$$v_\gamma(M)=\int_B K_\gamma(M;N)u(N)d\omega_N。\tag{111}$$

由于核 $K_\gamma(M;N)$ 的連續性，$v_\gamma(M)$ 的連續性是明显的。再重复上面指出的估計。由于(110$_1$)，对于展布在 β_δ 上的积分将有与以前相同的估计。剩下是在固定正数 δ 时来估计积分

$$\int_{B_\delta}|K_\gamma(M';N)-K_\gamma(M;N)|d\omega_N。\tag{112}$$

这可以和前面作过的完全一样，不过只在表达式

$$L_1(M',M;N)=r^\alpha L(M';N)-r'^\alpha L(M;N)$$

中，当 $r<\gamma$ 时(或 $r'<\gamma$)应以 γ 代替 r (或 r')。如認为 $K_0(M;N)=$ $=K(M;N)$，我們看出，$L_1(M',M;N)$ 是 B 内的点 M', M 及 N 的連續函数，且参数 γ 屬于区間 $0\leqslant\gamma\leqslant\varepsilon_1$，其中 ε_1 是任何正数。于是，在估計积分(108)时所說到的数 η，在这里可选它不依賴于 γ，而前面对于 $v_\gamma(M)$ 的等度連續性及 $|v_\gamma(M)|$ 的有界性的証明完全有效。

引理二　若連續函数 $u(N)$ 的模不大于同一数且 γ 取任何正值，则公式(111)确定等度連續函数类 $v_\gamma(M)$，这函数类的模也不大于同一数。

現在証明积分次序的交換公式，它是我們必需用到的：

$$\int_B\left[\int_B K(M;N)u_1(N)d\omega_N\right]u_2(M)d\omega_M=$$
$$=\int_B\left[\int_B K(M;N)u_2(M)d\omega_M\right]u_1(N)d\omega_N,\tag{113}$$

其中 $u_1(N)$ 及 $u_2(M)$ 是在 B 内的任何連續函数。对于連續核 $K_\gamma(M;N)$ 这公式是已經知道了的[II;97]:

(114) $$\int_B\left[\int_B K_\gamma(M;N)u_1(N)d\omega_N\right]u_2(M)d\omega_M=$$

$$=\int_B\left[\int_B K_\gamma(M;N)u_2(M)d\omega_M\right]u_1(N)d\omega_N。$$

不難証明，当 $\gamma\to 0$ 时，有

(115) $$\int_B K_\gamma(M;N)u_1(N)d\omega_N\to\int_B K(M;N)u_1(N)d\omega_N$$

一致地关于 M。事实上，

$$\left|\int_B[K(M;N)-K_\gamma(M;N)]u_1(N)d\omega_N\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\text{在}B\text{内}}|u_1(N)|\int_B|K(M;N)-K_\gamma(M;N)|d\omega_N。$$

但所写的差在圓 ω_γ 外变为零，因此

$$\left|\int_B[K(M;N)-K_\gamma(M;N)]u_1(N)d\omega_N\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\text{在}B\text{内}}|u_1(N)|\int_{\omega_\gamma}[|K(M;N)|+|K_\gamma(M;N)|]d\omega_N。$$

注意(101)及(110)的估計，得:

$$\left|\int_B[K(M;N)-K_\gamma(M;N)]u_1(N)d\omega_N\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\text{在}B\text{内}}|u_1(N)|\frac{4\pi C\gamma^{2-\alpha}}{2-\alpha},$$

从而推得(115)(一致地关于 M)。

完全相似，当 $\gamma\to 0$ 时，有

$$\int_B K_\gamma(M;N)u_2(M)d\omega_M\to\int_B K(M;N)u_2(M)d\omega_M$$

一致地关于 N，且从公式(114)取極限卽得公式(113)。

再来証明以后要用到的一个極限步驟。設在 B 内的連續函数 $\varphi_\gamma(N)$，它依賴于一个正参数 γ，当 $\gamma\to 0$ 时它一致地趋于 $\varphi_0(N)$，

極限函数 $\varphi_0(N)$ 显然也是連續的。这时，就有

$$(116)\quad \int_B K_\gamma(M;N)\varphi_\gamma(N)\,d\omega_N \to \int_B K(M;N)\varphi_0(N)\,d\omega_N。$$

我們有：

$$\left|\int_B [K(M;N)\varphi_0(N)-K_\gamma(M;N)\varphi_\gamma(N)]\,d\omega_N\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_B K(M;N)[\varphi_0(N)-\varphi_\gamma(N)]\,d\omega_N\right| +$$

$$+\left|\int_B [K(M;N)-K_\gamma(M;N)]\varphi_\gamma(N)\,d\omega_N\right|。$$

从 $\varphi_\gamma(N)$ 一致收斂于 $\varphi_0(N)$ 推知，对于充分接近于零的所有値 γ，有 $|\varphi_\gamma(N)|\leqslant D_1$，其中 D_1 是某常数，且注意(102)，得：

$$\left|\int_B [K(M;N)\varphi_0(N)-K_\gamma(M;N)\varphi_\gamma(N)]\,d\omega_N\right| \leqslant$$

$$\leqslant D \max_{\text{在 } B \text{ 内}} |\varphi_0(N)-\varphi_\gamma(N)| +$$

$$+D_1\int_B |K(M;N)-K_\gamma(M;N)|\,d\omega_N。$$

如我們剛才見过的，右端的积分与 γ 同时趋于零，也就是整个右端趋于零，从而推得(116)。

18. 无界核的积分方程 考察具有上面所分析的那种类型的無界核的积分方程：

$$(117)\qquad \varphi(M)=f(M)+\lambda\int_B K(M;N)\varphi(N)\,d\omega_N,$$

其中 $f(M)$ 是已給的且 $\varphi(M)$ 是在 B 内連續的待求函数。

首先，設 λ 不是特征値。我們証明这时齐次方程

$$(118)\qquad \varphi_\gamma(M)=\lambda\int_B K_\gamma(M;N)\varphi_\gamma(N)\,d\omega_N$$

对于充分小的一切正数 γ，沒有异于零的解。我們將用反証法。設存在这样正数列 $\gamma=\gamma_1, \gamma_2, \cdots$，它趋于零，使方程

$$\varphi_{\gamma_n}(M)=\lambda\int_B K_{\gamma_n}(M;N)\varphi_{\gamma_n}(N)d\omega_N \tag{119}$$

有不等于零的解。若注意到，这些解除了差一个常数因子外是完全确定的，則可假設

$$|\varphi_{\gamma_n}(M)|\leqslant 1, \tag{120}$$

且在点 M 的某一位置，上式取等号。

由于引理二函数 $\varphi_{\gamma_n}(M)$ 在 B 内是等度連續的。如果还注意到(120)，可以断言，从 $\varphi_{\gamma_n}(M)$ 中可以选擇子函数列，使它在 B 内一致收斂于某極限函数 $\varphi_0(M)$。关于这个子函数列在公式(119)中取極限，得到[17]：

$$\varphi_0(M)=\lambda\int_B K(M;N)\varphi_0(N)d\omega_N。 \tag{121}$$

由于过渡到極限的一致收斂性及在(120)内的等号对于任何 n 成立，可断言 $\varphi_0(M)$ 不恒等于零。从(121)推得 λ 是方程(117)的特征值，而这是与开始时所作的假設矛盾。于是，方程(118)对于充分逼近于零的一切 γ 仅有零解，且可断言，有連續核的方程

$$\varphi_\gamma(M)=f(M)+\lambda\int_B K_\gamma(M;N)\varphi_\gamma(N)d\omega_N \tag{122}$$

对于任意自由項 $f(M)$ 有解，且这解是唯一决定的。我們証明，对于充分接近于零的一切 γ，这些解的模不大于同一数。設 $m_\gamma=\max\limits_{在B内}|\varphi_\gamma(M)|$。我們必須証明，不存在任何数列 m_{γ_n}，它是趋于$(+\infty)$的。我們用反証法。設有这样数列，亦卽 $m_{\gamma_n}\to+\infty$。我們有：

$$\frac{|\varphi_{\gamma_n}(M)|}{m_{\gamma_n}}\leqslant 1, \tag{123}$$

且当取某一点 M 时达到等号。在等式(122)中設 $\gamma=\gamma_n$，且將两端除以 m_{γ_n}：

$$\frac{\varphi_{\gamma_n}(M)}{m_{\gamma_n}}=\lambda\int_B K_{\gamma_n}(M;N)\frac{\varphi_{\gamma_n}(N)}{m_{\gamma_n}}d\omega_N+\frac{f(M)}{m_{\gamma_n}}。 \tag{124}$$

右端的第二项在 B 内一致收敛于零。由于(123)及引理二,右端的第一项給出一致有界且等度連續的函数列。由于阿尔采拉定理,当 $\gamma_n \to 0$ 时,第一项在 B 内一致收敛于極限函数。因之左端在 B 內也应一致收敛于某極限函数 $\varphi_0(M)$,这極限函数不恒等于零的,因为在(123)中取到等号。在(124)中取極限,就得到(121) [17],亦即出現了 λ 是方程(117)的特征值,这与假設矛盾。因此,当 γ 充分逼近于零时,一切函数 $\varphi_\gamma(M)$的模不大于同一数。然后从(122)及引理二推出函数 $\varphi_\gamma(M)$ 是等度連續的。再应用一次阿尔采拉定理且取極限,得:

$$\omega(M)=f(M)+\lambda\int_B K(M;N)\omega(N)d\omega_N, \tag{125}$$

其中 $\omega(M)$ 是某連續函数。

因此,我們已指明,若 λ 不是方程(117)的特征值,則对于任意自由項 $f(M)$,这方程有解。按照齐次方程(121)仅有零解的假設可立即推出解的唯一性。

現在考察齐次方程,它是(121)的轉置方程:

$$\psi(M)=\lambda\int_B K(N;M)\psi(N)d\omega_N, \tag{126}$$

且指出它也仅有零解。假設不是这样,且設 $\psi(M)$ 是这方程的不等于零的解。將方程(117)的兩端乘以 $\psi(M)$,对 M 取积分且在二次积分中变换积分的次序,按照[17]:

$$\int_B\varphi(M)\psi(M)d\omega_M=\int_B\left[\lambda\int_B K(M;N)\psi(M)d\omega_M\right]\varphi(N)d\omega_N+$$
$$+\int_B f(M)\psi(M)d\omega_M,$$

从而由于(126)得到方程(117)的可解条件(参考从[10]中公式(79)的結論):

$$\int_B f(M)\psi(M)d\omega_M=0. \tag{127}$$

但前面已經看到方程 (117) 对于任何 $f(M)$ 的可解性。这个矛盾显出齐次方程(126)只有零解。

于是,对于形式如 (100) 的核我們已証明下面結論:有兩种可能:或者方程

$$\varphi(M)=f(M)+\lambda\int_B K(M;N)\varphi(N)d\omega_N;$$

$$\psi(M)=g(M)+\lambda\int_B K(N;M)\psi(N)d\omega_N$$

对于任何 $f(M)$ 及 $g(M)$ 同时有解且是唯一的,或者对应的齐次方程有不等于零的解。

注意 如果 λ 不是特征值,則已經証明,对于每一个充分接近于零的正的 γ,方程 (122) 有唯一解,且对于所有 γ 这些解的模不大于同一数。其次,借助于子函数列的选出及取極限,我們得到原来的方程(117)的解 $\varphi_1(M)$。

不难証明,利用解的唯一性,子函数列的选擇是不必須的。事实上,如果当 $\gamma\to 0$ 时,$\varphi_\gamma(M)$ 在某点 M 沒有确定的極限,則可取出兩个子函数列,它們一致收斂于兩个連續極限函数,这兩个極限函数在 M 点有不同值。于是,我們得到方程 (117) 的兩个不同解,而在 λ 不是特征值时,这是不可能的。因此,$\varphi_\gamma(M)$ 不須任何选擇就会趋于極限函数 $\omega(M)$。由于 (122),从函数 $\varphi_\gamma(M)$ 的模的有界性及等度連續性显示出收斂于極限的一致性。

19. 特征值的情况 现在設 λ 是特征值。如果下面兩个齐次方程

$$\varphi(M)=\lambda\int_B K(M;N)\varphi(N)d\omega_N; \tag{128_1}$$

$$\psi(M)=\lambda\int_B K(N;M)\psi(N)d\omega_N \tag{128_2}$$

之一有有限个綫性無关的解,則重复定理九 [**10**] 的证明,示出另一

个方程也有同样多个綫性無关的解。从这以后，也像在 [10] 中一样，可以証明条件(127) [其中 $\psi(M)$ 是方程(128₂)的任何解]不仅是方程(117)可解的必要条件，而且也是充分条件。

剩下要証的是，上述两方程的任一个例如方程 (128₁) 的綫性無关解的个数是有限的。

用反証法来証明。設方程(128₁)有無限多个的綫性無关的解

$$\varphi_n(M)=\lambda\int_B K(M;N)\varphi_n(N)d\omega_N,\quad (n=1,2,\cdots)。\tag{129}$$

可認为这些解是兩兩正交的：

$$\int_B \varphi_p(N)\overline{\varphi_q(N)}d\omega_N=0,\ \text{当}\ p\neq q\ \text{时},\tag{130}$$

且满足不等式

$$|\varphi_n(M)|\leqslant 1,\quad (n=1,2,\cdots),\tag{131}$$

并且达到等号。从(129)及(131)推知，$\varphi_n(M)$ 在 B 内是等度連續的，且在函数列 $\varphi_n(N)$ 中存在子函数列，它在 B 内一致收斂于某極限函数 $\varphi_0(N)$。在公式(130)中对于这个子函数列 $\varphi_p(N)$ 过渡到極限，將有：

$$\int_B \varphi_0(N)\overline{\varphi_q(N)}d\omega_N=0$$

且再一次对于指标 q 过渡到極限：

$$\int_B |\varphi_0(N)|^2 d\omega_N=0。\tag{132}$$

但 $\varphi_0(N)$不能恒等于零的，因为对于任何 n 在 (131) 中有等号成立，因而公式(132)导向矛盾。这就証明了方程(128₁)只有有限个綫性無关的解。

于是，对于形式如 (100) 的核还証明了以下結論：如果 λ 是方程(117) 的特征值，則方程(128₁)及(128₂)有相同有限个数的綫性無关的解，且对于方程 (117) 可解的必要且充分的条件是自由項

$f(M)$满足(127)，其中 $\psi(M)$ 是方程 (128_2) 的任何解。一切上面所說的沒有任何改变就轉移到一維，三維以及一般 n 維空間的情形。

这时，在公式(100)中显然我們应認为代替条件 $0<\alpha<2$ 的是 $0<\alpha<n$。

現在假定积分区域是有限閉曲面 Σ，且使这曲面服从下面条件：

1. 在曲面 Σ 的任何点有切面，当沿着曲面移动时切面連續地变动。

2. 存在这样正数 d，使以曲面 Σ 上任意一点 M 为中心及以 d 为半徑的球內的曲面 Σ 的部份，与平行于 Σ 在 M 点的法綫的直綫只相交于一点。于是，若采用 Σ 在 M 点的切面作为 XY 平面，則 Σ 的上述部份有显式方程 $z=f(x, y)$。

3. $f(x, y)$有一阶連續偏导数。

这时，对于提到的曲面部份的积分可归到对平面区域的积分，这平面区域是在切面內，且前面的一切討論及估計都保持有效。

对于沿曲綫的积分的情况也可完全类似地进行討論。

还可指出，对于所考察的那种类型的核在 λ 平面的任何有限区域內只存在有限个特征值。以后將对于对称核的情形来証明它。

在下段中我們將叙述另一方法来討論上述那种类型的核以及更广泛的無界核而不加証明。

20. 具有連續二次叠核的方程 我們限于考察有限平面区域 B 的情况。

可以証明，若我們从核(100)出發作叠核 $K_p(M;N)$，則当 M 及 N 兩点不重合时，所有这些叠核都是連續的。如果 p 充分大，則它們在 B 內的一切点 M 及 N 都是連續的。这些数 p 由不等式 $p>\frac{2}{2-\alpha}$ 确定，而对于 n 維空間，則有 $p>\frac{n}{n-\alpha}$。

其次，能够証明，在已知附帶条件下，前面一些定理的基本証明对于这样

的无界核仍然正确，它的一切叠核从某个开始都是连续的（参考 С.Л. 索伯列夫，数学物理方程，1947 年，第 243 页）。

设核 $K_p(M;\ N)$ 从 $p=m$ 开始都是连续的。容易证明，如果 λ 是方程 (128_1) 的特征值，则 $\mu=\lambda^m$ 是方程

$$\varphi(M)=\mu\int_B K_m(M;N)\varphi(N)d\omega_N \tag{133}$$

的特征值。反之，若 μ 是方程(133)的特征值，则根式 $\lambda=\sqrt[m]{\mu}$ 的值中至少有一个值是方程 (128_1) 的特征值。因为 $K_m(M;N)$ 是连续的，在复变量 μ 平面的任何有限区域内只可找到有限个特征值 μ。由于前面所说的，关于方程 (128_1) 的特征值 λ 也可以同样断定。

引起了关于我们在[7]及[8]中所叙述的弗列德和蒙工具保持有效的可能性问题。对于型如(100)的核这工具的形式如果不加改变就要失去意义。因为这时行列式(49)的对角线上的项变为无穷大。

可以证明，若在公式(100)中引入的 α 满足条件 $0<\alpha<\frac{n}{2}$（在[19]中我们仅有 $0<\alpha<n$），则弗列德和蒙工具只要改变一处地方即可保持有效：只须在行列式(49)中认为 $K(N_s;N_s)=0$。这时解核可仍旧表如形式(57)（参阅 И.И. 普利瓦洛夫，积分方程，1935 年，第 83 页）。

可以将弗列德和蒙工具换为另外一种形式。像前面一样，设当 $p\geqslant m$ 时核 $K_p(M;N)$ 是连续的。按通常方式，建立连续核 $K_m(M;N)$ 的解核 $R_m(M,N;\lambda)$。当 λ 接近于零时，它由以下级数表示

$$R_m(M,N;\lambda)=K_m(M;N)+K_{2m}(M;N)\lambda+K_{3m}(M;N)\lambda^2+\cdots,$$

而对于任何 λ 它是分式形式：

$$R_m(M,N;\lambda)=\frac{D_m(M,N;\lambda)}{D_m(\lambda)}。$$

能够证明，基本核有解核：

$$R(M,N;\lambda)=H(M,N;\lambda)+\frac{D_m(M,N;\lambda^m)}{D_m(\lambda^m)}+$$

$$+\lambda^m\int_B H(M,P;\lambda)\frac{D_m(P,N;\lambda^m)}{D_m(\lambda^m)}d\omega_P,$$

其中

$$H(M,N;\lambda)=K(M;N)+K_2(M;N)\lambda+\cdots+K_{m-1}(M;N)\lambda^{m-2}。$$

如果 λ 不是方程 $D_m(\lambda^m)=0$ 的根，则解核满足关系式(47)，且方程(94)有唯一解，它是由公式(46)表达的(参阅古萨，数学分析教程，卷三，第二分

册，1934 年，第 59 頁）。由所写的公式可見，在所給情况解核是 λ 的分函数。

可以証明，当無界核使积分

$$(134)\qquad \int_B\int_B |K(M;N)|^2 d\omega_M d\omega_N$$

有有限值时，上面証明的一切定理在这情况是成立的。这个条件确切的陈述及上述断言的証明将在卷五中給出，且在那里用到勒贝格积分的概念。

我們指出，对型如(100)的核，当$\alpha<\frac{n}{2}$时，积分(134)的值是有限的。当积分 (134) 有有限值时，推广弗列德和豪工具到这情况是由卡勒曼 (Math. Zeitschr. Bd 9, Heft. $^3/_4$, 1921) 及 C. Г. 米哈林 (苏联科学院报告，第 42 卷，第 9 期，1944) 实现的。

21. 对称核 具有所謂对称核的积分方程在数学物理中有广泛的应用。

定义 实核称作对称核，当交换它的变数时它本身的值不变。

在一維情况这是滿足条件：

$$(135)\qquad K(t,s)=K(s,t),\quad (s \text{ 及 } t \text{ 屬于正方形 } k_0)$$

的实核。

現在我們研究有对称核的积分方程的理論。一切証明將对于一維情况来进行。在多維情况它們可逐字逐句地仿照着同样进行。暂时將假設核是連續的。以后要指出理論在[17]中所考察的那种类型的無界核方面的推广。

在前面的例子中我們已見到，存在这样的核，它完全沒有特征值。而对于对称核来説这样事不会發生的，亦即成立下面基本定理。

定理 I 任何不恒等于零的对称核，或在[17]中指出的当$0<\alpha<\frac{n}{2}$时那类型的核有特征值（可能只有一个）。

我們將应用这个定理，至于它的証明將迟一些引出。暂时建立具有对称核的积分方程的某些簡單性質。

設 λ_1 及 λ_2 是兩个不同特征值，而 $\varphi_1(s)$ 及 $\varphi_2(s)$ 是对应的特

征函数，因此

$$\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi_1(t)dt;\ \frac{1}{\lambda_2}\varphi_2(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi_2(t)dt。$$

將第一个等式乘以 $\varphi_2(s)$，第二个乘以 $\varphi_1(s)$，对 s 积分且相减，則得：

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b \varphi_1(s)\varphi_2(s)ds= \tag{136}$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\varphi_1(t)dt\right]\varphi_2(s)ds-$$

$$-\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\varphi_2(t)dt\right]\varphi_1(s)ds。$$

变换右端积分中的一个积分的次序且利用(135)，我們确信右端等于零，亦即

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b \varphi_1(s)\varphi_2(s)ds=0,$$

从而，由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，

$$\int_a^b \varphi_1(s)\varphi_2(s)ds=0, \tag{137}$$

亦即，对应于不同特征值的任何两个特征函数的乘积对基本区間 $[a,b]$ 的积分等于零。

現在証明，一切特征值是实数。我們用反証法。設 λ_0 为非实（复）的特征值，且 $\varphi_0(s)$ 是对应的特征函数，按照特征函数本身的定义，它必須不恒等于零。我們有：

$$\varphi_0(s)=\lambda_0\int_a^b K(s,t)\varphi_0(t)dt。$$

在这等式中取共軛值，得：

$$\overline{\varphi_0(s)}=\bar{\lambda}_0\int_a^b K(s,t)\overline{\varphi_0(t)}\,dt。$$

由此可見，$\bar{\lambda}_0$ 也是特征值，$\overline{\varphi_0(s)}$ 是对应特征函数，且因 λ_0 不是实数，則 $\bar{\lambda}_0\neq\lambda_0$。特征函数 $\varphi_0(s)$ 及 $\overline{\varphi_0(s)}$ 是与不同特征值对应的，故

必須滿足条件 (137)。如果在这式中令 $\varphi_1(s)=\varphi_0(s)$ 及 $\varphi_2(s)=\overline{\varphi_0(s)}$，就有

$$\int_a^b |\varphi_0(s)|^2 ds = 0,$$

从而推得[3] $\varphi_0(s)$ 恒等于零，而这与它是特征函数的事实矛盾的。

我們知道，对应于同一特征值的特征函数的任何常系数綫性組合也是对应于这个相同特征值的特征函数。这可以用另一种說法表明，对应于某特征值的特征函数構成綫性流形[4]。

因为已証明特征值的实数性質，我們可以認为一切特征函数也是实的[4]。这时前面得到的等式(137)說明：对应于不同特征值的任何兩个特征函数互相正交。

任何特征值 λ 都有有限个綫性無关的特征函数和它对应[10]。可应用正交化方法到这些函数，因此可認为这些函数是兩兩正交且标准的。前面我們已經見过对应于不同特征值的特征函数是互相正交的。于是，可認为一切特征函数是兩兩正交且标准的。

其次我們知道，在 λ 的任何有限变动区間上只可找到有限个特征值。根据这一点，我們可將一切特征值按照它們的絕对值不减少的次序排列：

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \cdots, \tag{138}$$

如果特征值的个数是無限的，則当 $n\to\infty$ 时，$|\lambda_n|\to+\infty$，且任何特征值出現在写出数列中的次数等于它的秩[4]（对应于它的綫性無关的特征函数的个数）。因而一切特征函数也可排列

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \varphi_3(s),\ \cdots, \tag{139}$$

并且由上述可把它們看作是正交的且标准的实函数系。

系 (139) 称为核 $K(s,t)$ 或它的对应积分方程的特征函数系。

对于特征函数我們有：

$$(139_1)\qquad \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}=\int_a^b K(s,t)\varphi_k(t)dt,$$

从而看出，这式的左端可视作核 $K(s,t)$ 关于正交标准系 (139) 的富里埃系数。貝塞尔不等式給出：

$$(140)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right]^2\leqslant\int_a^b[K(s,t)]^2dt。$$

对 s 积分，得：

$$(141)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b[K(s,t)]^2dt\,ds。$$

若特征值的个数是無限的，取極限，有：

$$(142)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b[K(s,t)]^2dt\,ds。$$

对于在 [17] 中所說的那类型的核前面的一切叙述，包括关于在变量的任何有限区間內有有限个特征值的断言，也是正确的。

事实上，証明中唯一重要因素是公式(136)的右端兩积分中一个积分次序的交換，而这样交換对于 [17] 中提到的那类型的無界核是有效的。

以后在有对称核的积分方程理論的叙述中，我們將假設在公式(100)中出現的 α 滿足条件 $0<\alpha<\frac{n}{2}$，而在一維情况，它滿足条件 $0<\alpha<\frac{1}{2}$。这样的核称为弱極性的。在更广泛的假設 $0<\alpha<n$ 下，理論基本上也保持有效，但在这广泛情况下，理論的闡明用勒貝格积分来講更加自然，我們將在卷五中講它。在数学物理的应用中所实現的条件是 $0<\alpha<\frac{n}{2}$。我們注意，在叙述基本定理 I 时我們是限制在条件 $0<\alpha<\frac{n}{2}$ 下的。对于弱極性核有：

$$[K(s,t)]^2\leqslant\frac{C^2}{|s-t|^{2\alpha}},\ (2\alpha<1)。$$

把 [17] 开始部份的証明再对一維情况重复作一次，我們將看到，积分

$$\int_a^b [K(s, t)]^2 dt$$

有意义，且不大于某确定正数 M：

$$\int_a^b [K(s, t)]^2 dt < M。 \tag{143}$$

完全与 [8] 中一样，可証在任何有限区間 $[-L, +L]$ 內仅含有限个不同的特征值。

于是对于弱極性核也有(138)及(139)。以后一切証明都先对連續核然后对弱極性核来引出。

22. 关于特征函数的展开式 一切特征函数 (139) 的全体可能不成为完备系。例如，对于对称退化核就有这种情况，这时特征值的个数为有限。对于連續函数 $F(s)$ 或甚至具有如 [14] 中指出的不連續性的不連續函数可建立关于 (139) 中的函数系的富里埃級数，但沒有任何根据肯定这級数是收斂的。甚至卽使它在区間 $[a, b]$ 內是一致收斂的，也不能肯定它的和等于 $F(s)$，因为函数 (139) 可能不成为完备系，而在 [3] 中証明了的命題不适用。現在先講核 $K(s, t)$ 的富里埃級数的作法，而把这核看作是 t 的函数。

我們已見到，核的富里埃系数等于比值 $\varphi_k(s):\lambda_k$，于是富里埃級数有下形式：

$$\sum_k \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}, \tag{144}$$

且和是对于 k 而取的，若特征值的个数無限，k 取到無穷大；或者，k 取到有限数，而等于 (139) 中一切特征函数的个数。

我們指出，級数 (144) 可以看作在 k_0 內确定的核 $K(s, t)$ 关于函数 $\varphi_k(s)\varphi_l(t)$ $(k, l=1, 2, \cdots)$ 的富里埃級数，不难驗証，这些函数在 k_0 內成为正交标准系。这时

$$\iint\limits_{k_0} K(s,t)\varphi_k(s)\varphi_l(t)ds\,dt=\frac{1}{\lambda_l}\int_a^b \varphi_k(s)\varphi_l(s)ds=\begin{cases}0, 当 k\neq l;\\ \dfrac{1}{\lambda_k}, 当 k=l。\end{cases}$$

級数(144)具有这样可注意的性質，如果它在 k_0 内一致收斂，則它的和就等于核，亦即在这情況函数系的不完备性無損于这个事实。因为当級数(144)一致收斂时，它的和是在正方形 k_0 内的連續函数，所以在証明上述性質时自然要假設核的連續性。

定理一 若核是連續的且級数(144)在 k_0 内一致收斂，則它的和在 k_0 内等于核，亦即

$$K(s,t)=\sum_k \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}。\tag{145}$$

考慮差

$$\omega(s,t)=K(s,t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k},$$

它是在 k_0 内的連續对称函数。如果固定 s，且視 $\omega(s,t)$ 为在区間 $[a,b]$ 内 t 的函数，則它关于函数系 $\varphi_k(t)$ 的富里埃系数等于零[3]：

$$\int_a^b \omega(s,t)\varphi_k(t)dt=0,\quad (k=1,2,\cdots)。\tag{146}$$

我們必須証明 $\omega(s,t)$ 在正方形 k_0 内恒等于零。用反証法來証明这个事实。

設函数 $\omega(s,t)$ 在正方形 k_0 内不恒等于零，且取它为积分方程

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b \omega(s,t)\psi(t)dt$$

的核。由于在前节中所述的基本定理，这个方程至少必有一个特征值 λ_0，它对应于不恒等于零的某特征函数 $\psi_0(s)$：

$$\psi_0(s)=\lambda_0\int_a^b \omega(s,t)\psi_0(t)dt。\tag{147}$$

我們証明，这个函数 $\psi_0(s)$ 应与核 $K(s,t)$ 的一切特征函数 $\varphi_k(s)$ 正交。事实上，將(146)的兩端乘以 $\lambda_0\psi_0(s)$ 且对 s 积分，得：

$$\lambda_0 \int_a^b \int_a^b \omega(s,\ t)\psi_0(s)\varphi_i(t)\,ds\,dt = 0。$$

由于(147)及$\omega(s,\ t)$的对称性，从而：

$$(148)\qquad \int_a^b \psi_0(t)\varphi_k(t)\,dt = 0, \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)。$$

我們可写(147)为以下形式：

$$\psi_0(s) = \lambda_0 \int_a^b \left[K(s,\ t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]\psi_0(t)\,dt。$$

注意于級数(144)的一致收斂性及公式(148)，得：

$$\psi_0(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s,\ t)\psi_0(t)\,dt,$$

亦即函数$\psi_0(s)$应是原来核$K(s,t)$的特征函数。因之它应是对应于特征值λ_0的那些特征函数$\varphi_k(s)$的綫性組合。

但这是不可能的，因为$\psi_0(s)$及一切$\varphi_k(s)$成为正交系，而正交函数系不是綫性相关的[3]。这矛盾指出$\omega(s,\ t)$不恒等于零的假設是不正确的，亦即在k_0内$\omega(s,\ t)\equiv 0$，也就是公式(145)成立。

在核$K(s,\ t)$是弱极性的假設下証明似乎可以重演，但这时从公式((145)，核$K(s,\ t)$在k_0内应是連續函数，亦即对于弱极性的无界核，級数(144)在k_0内不可能一致收斂。

如果核有有限个特征值，則級数(144)由有限項构成，且前面的証明完全保持有效，亦即有：

$$(149)\qquad K(s,\ t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k},$$

其中m是在序列(138)中特征值的个数。

公式(149)指出$K(s,\ t)$是退化核。于是，一方面，如以前見过的，退化核(在所給情况下它是对称的)有有限个特征値，且另一方面，如我們方才指出的，若对称核有有限个特征值，則它是退化核。

这样一来，在連續对称核的情况下，特征值个数的有限性是核的退化性的必要且充分的条件。

现在轉到任何函数 $F(s)$ 关于特征函数(139)的富里埃級数的建立。預先引入下面一个新概念。如果級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$$

在变量 x 的某区域内一致收斂，則謂級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x) \tag{150}$$

在这区域内是正規收斂的。从正規收斂性显然推出級数的絕对收斂性。其次，有：

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p}f_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n+p}|f_k(x)|。$$

从正規收斂性推知，对于任給正数 ε 存在这样数 N，当 $n>N$，对任何 $p>0$ 及在所指区域内的任何 x，写出的不等式的右端 $<\varepsilon$。不等式的左端这时更加 $<\varepsilon$，亦即从正規收斂性不仅推出絕对收斂而且也推出一致收斂。

如果級数的項的絕对值不大于某些正数：$|f_k(x)|\leqslant a_k$，且从这些数所成的級数收斂，則級数(150)显然正規收斂。然而从正規收斂性不能推出数 a_k 的存在。如果这些数 a_k 存在，則有时謂級数是正常收斂的。于是，从正常收斂性推得正規收斂性，且从正規收斂性推出这級数的絕对且一致收斂性。

存在某連續函数类，这类中的函数关于函数(139)的富里埃級数在区間 $[a,b]$ 内正規收斂。这类函数叫做可用核来表示的函数。

定义 連續实函数 $F(s)$ 称为可用核来表示的函数，如果存在这样的在 $[a,b]$ 内連續的实函数 $h(t)$（或具有有限个不連續点的有界函数），使

$$F(s)=\int_a^b K(s,t)h(t)\,dt。 \tag{151}$$

这里的核 $K(s, t)$ 可假定是連續的或是弱極性的。

定理二 可用核表示的任何函数关于函数 (139) 的富里埃級数在区間 $[a, b]$ 內正規收斂。

用 h_k 記函数 $h(t)$ 的富里埃系数:

$$h_k = \int_a^b h(t)\varphi_k(t)dt,$$

且确定函数(151)的富里埃系数 F_k:

$$F_k = \int_a^b F(s)\varphi_k(s)ds = \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t)h(t)dt\right]\varphi_k(s)ds,$$

或,交换积分的次序且应用核的对称性:

$$F_k = \int_a^b \left[\int_a^b K(t, s)\varphi_k(s)ds\right]h(t)dt,$$

从而,由于(139_1),

$$F_k = \frac{h_k}{\lambda_k}。 \tag{152}$$

于是,函数(151)的富里埃级数有形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(s), \tag{153}$$

这时我們認为特征值的个数是無限的。按照柯西不等式,有:

$$\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(s)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} h_k^2}\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left[\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right]^2}。 \tag{154}$$

轉到不等式(140),它对于任何数 n 成立。注意 (140) 的左端的项是正的,我們可断言,对于任何 n 及 p,有

$$\sum_{k=n}^{n+p}\left[\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right]^2 \leqslant \int_a^b [K(s, t)]^2 dt。$$

右端的积分無論对于連續核或对于弱極性核总不大于某正数 M,亦卽

$$\sum_{k=n}^{n+p}\left[\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right]^2 \leqslant M,$$

且从(154)得出：

$$\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(s)\right|\leqslant\sqrt{M}\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}h_k^2}。$$

因为富里埃系数的平方 h_k^2 作成收斂級数[3]，則当 n 無限增加时，对任何 $p>0$，右端的和趋于零。还注意右端不依赖于 s，我們可断言，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(s)\right|$$

在 $[a, b]$ 内一致收斂，因而定理得証。

由于函数系(139)可能是不完备的，我們不能沒有补充証明就肯定級数(153)的和等于 $F(s)$。但可以証明事情确实是这样，也就是成立下面基本定理：

定理 II　用核表示的任何函数 $F(s)$ 关于函数(139)的富里埃級数的和等于 $F(s)$，或换句話說，用核表示的一切函数，能展开为关于函数(139)的富里埃級数，这級数在区間 $[a, b]$ 内正規收斂。

这定理通常称为希尔伯特-施密特定理，它無論对于連續核或对于弱極性核总是正确的。关于特征値的存在定理 I 和这个定理我們將在后面給以証明。

如果連續核的富里埃級数(144)在 k_0 内一致收斂，則定理 II 的証明十分簡單。

事实上，將(145)的兩端乘以 $h(t)$ 且对 t 积分，得：

$$F(s)=\int_a^b K(s, t)h(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\int_a^b\varphi_k(t)h(t)\,dt,$$

亦卽

$$F(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}h_k,$$

这就給出定理 II。

注意　正交标准实函数系(139)的选取可以有一定的任意性。

如果一切特征值是簡單的，亦即它們的秩都是等于1的，则所說任意性只不过是每一特征函数 $\varphi_k(s)$ 可改变它的正負号。考虑多重特征值的情况。例如，若特征值 λ_1 的秩等于3，于是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，則可用另外三个函数来替代 $\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，$\varphi_3(s)$，这另外三个函数是 $\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，$\varphi_3(s)$ 經任何綫性正交变换后得来的。

若 c_1, c_2, c_3 是任何函数 $F(s)$ 关于 $\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，$\varphi_3(s)$ 的富里埃系数，則不难証明，和：

$$c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)+c_3\varphi_3(s)$$

对于任意选取的函数 $\varphi_1(s)$，$\varphi_2(s)$，$\varphi_3(s)$ 保持数值不变。

上面指出的一些定理对于任意选取的系(139)当然成立。

23. 地尼定理　本段中將証明在以后將用到的一个輔助定理。是由意大利数学家地尼首先証明的。

定理　若級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{155}$$

的一切項都是在区間 $[a, b]$ 内的非負連續函数，級数在这区間内的任何点收斂且它的和是在所提到的区間内的連續函数，則級数(155)在 $[a, b]$ 内一致收斂。

以 $R_n(x)$ 記級数(155)的余項：

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)。$$

按条件，因为級数的項及級数的和都是連續函数，函数 $R_n(x)$ 也將是在区間 $[a, b]$ 内的連續函数。对于任意固定的 x，当 n 增加时，它不能增加的，因为級数的項是非負的，亦即 $R_{n+1}(x)\leqslant R_n(x)$。用 m_n 記非負連續函数 $R_n(x)$ 在区間 $[a, b]$ 内所取的最大值，且設 ξ_n 是这区間这样的点，在这点 $R_n(x)$ 达到最大值，亦即 $m_n=R_n(\xi_n)$。我們証明，当 n 增加时，m_n 不能增加的，亦即 $m_{n+1}\leqslant m_n$。事实上，

$m_{n+1}=R_{n+1}(\xi_{n+1})\leqslant R_n(\xi_{n+1})$。但 $R_n(\xi_{n+1})$不大于函数 $R_n(x)$在区間$[a, b]$内的最大値 m_n，从而得出 $m_{n+1}\leqslant m_n$。不增加的正数列 m_n 必有極限，这極限可能是零或正数：若这極限是零，則保証了級数(155)的一致收斂性，因为它的余項的最大値当 $n\to\infty$ 时趋于零。剩下要証明的是数 m_n 的極限不可能是正数。我們用反証法。前面已經見到，一切数 ξ_n 都在有限区間$[a, b]$内，因之在这区間内至少存在一个这些数的極限点 $x=c$[II; 89]，亦即至少有一个这样的点，在它的任意小鄰区内可找到無限多个数 ξ_n。按条件，在点 $x=c$ 級数是收斂的，因之可固定这样充分大的下标 N，使 $R_N(c)<\frac{l}{2}$，其中 l 記数列 m_n 的假想的正極限。因为 $R_N(x)$ 是連續函数，我們可找到点 ξ_n，当 $n>N$ 时，它与 c 点这样逼近，使在这点 ξ_n，不等式 $R_N(\xi_n)<\frac{l}{2}$是保持的。因按条件 $n>N$，則有 $m_n=R_n(\xi_n)\leqslant R_N(\xi_n)$，亦即，$m_n<\frac{l}{2}$，而这是与不增加的数列 m_n 趋于極限 l 相矛盾的。有了这样矛盾，因而地尼定理得証。

我們知道，若級数的项是连续函数且級数一致收斂，則它的和也是連續函数。在一般情况，逆定理是不正确的，亦即从和的連續性不能断定級数的一致收斂性。地尼定理所肯定的是，若級数的項不仅連續，而且是非負函数，則肯定逆定理的成立，亦即从和的連續性推出級数的一致收斂性。

24. 二次叠核的展开式 在最近的四段中將假設核是連續的。因此一切叠核也是連續的。从公式

$$K_2(s, t)=\int_a^b K(s, t_1)K(t_1, t)dt_1 \tag{156}$$

我們看出，如果把 $K_2(s, t)$ 看作 s 的函数，則它是可用核表示的，且函数 $K(t_1, t)=K(t, t_1)$ 起了 $h(t_1)$ 的作用，而 t 是参数。前面已經見过，$K(t, t_1)$关于函数系(139)的富里埃系数等于 $\varphi_k(t):\lambda_k$，

因之由定理 II 給出：

$$K_2(s, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k^2}。\tag{157}$$

对于 $[a, b]$ 内的任何 s 及相同区間内的任何 t 这公式已經証明是成立的(根据定理 II)，亦即这公式在整个正方形 k_0 内是成立的。

回忆公式[5]：

$$K_n(s, t)=\int_a^b K(s, t_1)K_{n-1}(t_1, t)dt_1。\tag{158}$$

从(152)得出，如果把 $K_n(s, t)$ 看作 s 的函数，則它的富里埃系数等于 $K_{n-1}(t_1, t)$ 的富里埃系数除以 λ_k，这里 $K_{n-1}(t_1, t)$ 視作 t_1 的函数。$K(s, t)$ 的系数是 $\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}$，$K_2(s, t)$ 的系数是 $\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^2}$，依此类推。一般地 $K_n(s, t)$ 的系数是 $\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^n}$，且定理 II 給出：

$$K_n(s, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k^n}, \quad (n=2, 3, \cdots)\tag{159}$$

并且也和前面一样，級数在 k_0 内收斂。我們將研究这些級数的收斂情况。

由于定理 II，我們可肯定写出的这些級数在区間 $[a, b]$ 内对于变量 s 的正規收斂性，而 t 是在相同区間内任一固定值。由于对称性，我們將有在固定 s 时对于变量 t 的正規收斂性。我們証明，这些級数在正方形 k_0 內对于兩个变量是正規收斂的。只須引出对于級数(157)的証明。对于其余的級数(当 $n>2$ 时)証明更加保持有效，因为 $|\lambda_n|\to+\infty$。应用显明的不等式：

$$\left|\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k^2}+\frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k^2}\right],$$

我們看出，只須証明級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k^2}$ 在区間 $[a, b]$ 内是一致收斂的。这个最后級数从級数(157)取 $t=s$ 可获得，因之它的和等于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k^2}=K_2(s, s)。$$

所写級数的項都是非負連續函数，它的和是在区間 $[a, b]$ 内的連續函数，因此这級数的一致收斂性立即从地尼定理推出。

現在从所得公式来引出一些結果。在公式(159)中設 $t=s$ 且对 s 积分，注意到函数 $\varphi_k(s)$ 的标准性，我們得到所謂叠核的迹的表达式，它是由基本核的特征值表出的：

$$\int_a^b K_n(s, s)ds=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^n}。\tag{160}$$

注意到(156)，可以写出：

$$\int_a^b K_2(s, s)ds=\int_a^b\int_a^b[K(s, t)]^2 ds\,dt,$$

于是当 $n=2$ 时可由公式(160)导出等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}=\int_a^b\int_a^b[K(s, t)]^2 ds\,dt。\tag{161}$$

我們回忆，在这以前只証明了不等式(142)。

公式(159)在 $n=1$ 时可能是不正确的。但現在我們証明，对于在 $[a, b]$ 内任何固定值 s：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[K(s, t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]^2 dt=0,\tag{162}$$

幷且关于 s 一致收斂于零。公式(162)指出，当把 $K(s, t)$ 用它的富里埃級数的部份和替代时，所得的平方中值誤差当 $n\to\infty$ 时趋于零。轉到我們的断言的証明。考虑 $K(s, t)$ 为 t 的函数，对于它我們有富里埃系数 $\varphi_k(s):\lambda_k$，且公式(23)給出：

$$\int_a^b\left[K(s, t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]^2 dt=\int_a^b[K(s, t)]^2 dt-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k^2}。$$

但我們見到过，

$$\int_a^b[K(s, t)]^2 dt=K_2(s, s),$$

然而按照(157)：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k^2}\to K_2(s, s),$$

此外，上面已經見过，这收斂性关于 s 是一致的。由此得出的結論是，表达式(162)关于 s 一致收斂于零。更加有：

$$\int_a^b\int_a^b\left[K(s, t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]^2 ds\, dt\to 0。$$

設級数(144)在区間 $[a, b]$ 内对于任意固定值 s 关于 t 一致收斂，且用 $K^*(s, t)$ 記这級数的和。在公式(162)中的积分号下取極限，有：

$$\int_a^b [K(s, t)-K^*(s, t)]^2 dt=0,$$

从而立卽得出 $K^*(s, t)=K(s, t)$，也就是，对于公式(145)的証明不須假設級数在正方形 k_0 内关于兩个变量的一致收斂性，而只須設級数关于兩变量之一是一致收斂的，而另一变量取任何固定值。

把差

$$\omega_n(s, t)=K(s, t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \tag{163}$$

看作某积分方程

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b\omega_n(s, t)\varphi(t)dt \tag{164}$$

的核，且証明 $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots$ 及函数 $\varphi_{n+1}(s), \varphi_{n+2}(s), \cdots$ 是方程(164)的特征值及特征函数的全体。將(163)的兩端乘以 $\lambda_m\varphi_m(t)$，其中 $m>n$，且对 t 积分。注意到函数 $\varphi_p(t)$ 的正交性，得：

$$\lambda_m\int_a^b\omega_n(s, t)\varphi_m(t)dt=\lambda_m\int_a^b K(s, t)\varphi_m(t)dt,$$

或者注意 $\varphi_m(s)$ 是 $K(s, t)$ 的对应于特征值 λ_m 的特征函数則有：

$$\lambda_m\int_a^b \omega_n(s,\ t)\varphi_m(t)dt=\varphi_m(s)。$$

于是我們看出，当 $m>n$ 时，方程(164)有与基本方程相同的特征值 λ_m 及对应的特征函数 $\varphi_m(s)$。剩下要証的是，这是方程(164)的特征值及特征函数的完全系。將(163)的兩端乘以 $\varphi_m(s)$，其中 $m\leqslant n$。注意到函数 $\varphi_p(s)$ 的正交性及标准性，得：

$$\int_a^b \omega_n(s,\ t)\ \varphi_m(s)ds=\int_a^b K(s,\ t)\varphi_m(s)ds-\frac{\varphi_m(t)}{\lambda_m}。$$

因 $\varphi_m(t)$ 是核 $K(s,\ t)$ 的对应于特征值 λ_m 的特征函数，故右端的差等于零，亦即

(165) $$\int_a^b \omega_n(s,\ t)\varphi_m(s)ds=0,\quad (m\leqslant n)。$$

設 λ 是方程(164)的某特征値而 $\varphi(s)$ 是对应的特征函数。將(164)的兩端乘以 $\varphi_m(s)$ 幷注意(165)，得：

(166) $$\int_a^b \varphi(s)\varphi_m(s)ds=0,\ (m\leqslant n)。$$

在方程(164)中代入 $\omega_n(s,\ t)$ 的表达式(163)，幷注意(165)，可写(164)如形式：

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt,$$

亦即，$\varphi(s)$ 也是基本核的特征函数，此外，由于(166)，当 $m\leqslant n$ 时，$\varphi(s)$ 与 $\varphi_m(s)$ 正交，由此推出，对应的特征値 λ 与 $\lambda_k\ (k>n)$ 中的一个重合，于是 $\varphi(s)$ 是函数 $\varphi_k(s)\ (k>n)$ 中的一个，或者在特征值的秩大于一的情况，$\varphi(s)$ 是它們的綫性組合。于是，关于核 $\omega_n(s,t)$ 的特征函数的断言得証。

从公式(159)得出，核 $K_n(s,\ t)$ 是对称的。这結果也可直接从它們的定义获得。作齐次积分方程

(167) $$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K_n(s,\ t)\varphi(t)dt。$$

应用級数的一致收斂性，不难驗証 λ_k^n 都是方程(167)的特征值，而 $\varphi_k(s)$ 是对应的特征函数。我們証明，这方程沒有别的特征值及特征函数。若存在特征值 λ，不同于一切 λ_k^n，則对应的特征函数应与一切 $\varphi_k(s)$ 正交，亦即

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi(t)dt=0, \quad (k=1, 2, \cdots)。$$

但其时由于 (159)，(167) 的右端对于任何 s 总是等于零的，亦即 $\varphi(s)$ 恒等于零，这是荒謬的。現在設特征值 λ 与一个或几个 λ_k^n 重合。我們必須証明，$\varphi(s)$ 是对应的 $\varphi_k(s)$ 的綫性組合。如果不是这样，亦即 $\varphi(s)$ 和提到的 $\varphi_k(s)$ 綫性無关，采用正交化法，則可建立不恒等于零的 $\varphi(s)$ 与提到的一切函数 $\varphi_k(s)$ 正交。这个函数也与其余的 $\varphi_k(x)$ 正交，因为这些其余的 $\varphi_k(x)$ 对应于其他特征值。

于是，$\varphi(s)$ 与一切 $\varphi_k(s)$ 正交，因而像前面已經証明过的，$\varphi(s)$ 恒等于零，这是荒謬的。

因此，λ_k^n 及 $\varphi_k(s)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 是核 $K_n(s, t)$ 的特征值及特征函数的完全組。

若在确定特征值及特征函数的基本方程

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt$$

中，將兩端除以 λ，然后令 $\lambda=\infty$，則得方程

$$\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt=0, \quad (s \text{ 是 } [a, b] \text{ 内任何值}), \tag{168}$$

亦即，形式地講，方程(168)确定了对应于特征值 $\lambda=\infty$ 的特征函数(如果它們存在的話)。

定义 若連續函数 $\varphi(t)$ 对于 $[a, b]$ 内任何 s 滿足方程(168)，則謂 $\varphi(t)$ 与核正交。

我們証明定理。

定理三 連續函数 $\varphi(t)$ 与核正交的必要且充分的条件是，它

与核的一切特征函数正交。

我們必須証明，(168)和关系式

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi(t)dt=0,\quad (k=1,2,\cdots) \tag{169}$$

是等价的。

首先証明从(168)得出(169)。为了这样，將(168)的兩端乘以$\varphi_k(s)$且对 s 积分。变換积分的次序且利用核的对称性，得：

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(t,s)\varphi_k(s)ds\right]\varphi(t)dt=0$$

或

$$\lambda_k\int_a^b \varphi_k(t)\varphi(t)dt=0,$$

从而得出(169)。

現在証明从(169)得出(168)。注意(157)及級数的一致收斂性，得

$$\int_a^b K_2(t,s)\varphi(s)ds=0。$$

將兩端乘以 $\varphi(t)$ 且对 t 积分：

$$\int_a^b\int_a^b K_2(t,s)\varphi(s)\varphi(t)ds\,dt=0,$$

其中积分的次序是沒有关系的。

利用(156)，可把这式改写作：

$$\int_a^b\int_a^b\int_a^b K(t,t_1)K(t_1,s)\varphi(s)\varphi(t)ds\,dt\,dt_1=0, \tag{170}$$

或，利用核的对称性：

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(t_1,t)\varphi(t)dt\right]\left[\int_a^b K(t_1,s)\varphi(s)ds\right]dt_1=0。$$

在方括弧內的兩个积分是相同的，亦即

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(t_1,s)\varphi(s)ds\right]^2dt_1=0,$$

从而推出[3]：

$$\int_a^b K(t_1, s)\varphi(s)ds=0, \quad (t_1 \text{ 是}[a, b]\text{内任意值}),$$

亦即(168)。

25. 对称核的分类 設 $p(s)$ 及 $q(s)$ 是在区間$[a, b]$内为連續的两个函数。作二重积分：

$$\int_a^b\int_a^b K(s, t)p(s)q(t)ds\,dt,$$

它类似于在[**III**$_1$; **40**]中所考察的双綫性型：

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_iy_k, \quad (a_{ik} \text{ 是实数}; a_{ki}=a_{ik})。$$

应用定理 II，得：

$$\int_a^b K(s, t)q(t)dt=\sum_{k=1}^\infty \frac{q_k}{\lambda_k}\varphi_k(s),$$

其中 q_k 是函数 $q(t)$ 的富里埃系数，且右端的級数正規收斂。將两端乘以 $p(s)$，对 s 积分，且用 p_k 記函数 $p(s)$ 的富里埃系数，得到下面的积分表示式：

$$\int_a^b\int_a^b K(s, t)p(s)q(t)ds\,dt=\sum_{k=1}^\infty \frac{p_kq_k}{\lambda_k}, \tag{171}$$

且右端的級数絕对收斂。当 $q(s)\equiv p(s)$ 时，得到类似二次型的式子：

$$J=\int_a^b\int_a^b K(s, t)p(s)p(t)\,ds\,dt=\sum_{k=1}^\infty \frac{p_k^2}{\lambda_k}。 \tag{172}$$

这公式是作为对称核的分类的基础，參閱[**III**$_1$; **35**]。若对于任意选取的連續函数 $p(s)$，积分

$$\int_a^b\int_a^b K(s, t)p(s)p(t)ds\,dt \tag{173}$$

不是負的，則核 $K(s, t)$ 叫做正的。如果一切特征值 λ_k 是正的，則从公式(172)立即推出核在上述意义下是正的。現在設即使只有一个負特征值，便可証明这时核不能是正的。事实上，例如設

$\lambda_1<0$，且在公式(172)中代$p(s)$以$\varphi_1(s)$。由于函数$\varphi_k(s)$的正交性及标准性，这时$p_1=1$而其余的p_k都等于零，因此等式(172)的右端变为$\frac{1}{\lambda_1}$，因而是負的。于是可看出，核的正性与这核的一切特征值的正性兩件事是等价的。

类似地，若对于任意选取的連續函数$p(s)$，$J\leqslant0$，則核$K(s, t)$叫做負的。完全和上面一样，可以証明核的負性与这核的一切特征值的負性兩件事等价。还引用一个新概念。若不存在任何不恒等于零的連續函数与核$K(s, t)$的一切特征函数正交，則这个核$K(s, t)$叫做在連續函数类中完全的，或簡單地叫做完全的。亦卽，由于[24]中的定理三，若不存在任何不恒等于零的連續函数与核正交，則这个核叫做完全的。換句話說，完全核归到这样要求，它使积分方程(168)除了零解外沒有任何連續解。我們可說，完全核归到这样要求，使值$\lambda=\infty$不对应于任何連續特征函数。

設$K(s, t)$是正核，亦卽一切数λ_k都是正的。这时公式(172)的右端只在函数$p(s)$的一切富里埃系数p_k都等于零时才变为零，亦卽如果函数$p(s)$与核的一切特征函数正交时它才变为零。对于完全核，这样不恒等于零的連續函数$p(s)$不存在，因之对于正完全核，我們可肯定对于任何不恒等于零的連續函数，积分(172)將严格的是正的。反之，如果对于任何不恒等于零的連續函数，使积分$J>0$，則我們可肯定核是完全的。如果对于任何不恒等于零的連續函数使$J>0$，則核叫做正定的。从前面的討論显示出，当且仅当正核是完全时，它是正定的。类似情况，若对于任何不恒等于零的連續函数$p(s)$，有$J<0$，則核叫做負定的。同前面一样，可能証明，当且仅当負核是完全时，它是負定的。

設核$K(s, t)$的特征函数$\varphi_k(s)$作成完备函数系[3]。在这情况，我們知道不存在不恒等于零的連續函数与一切$\varphi_k(s)$正交；亦卽从特征函数系的完备性推示出核的完全性。这斷言的反面不正

确的，亦卽如果核是完全的，却不能卽由此推出它的特征函数系在[3]中确定的意义下是完备的。

能够作出一个完全核，而它的特征函数系不是完备的。对于这样的核方程(168)沒有連續解，但一定有些解，它們是不連續函数。利用我們將在以后說到的新积分概念，且考察比連續函数更加广泛的函数类，就可以这样来定义核的完全性，使它和特征函数系的完备性是一致的。

任何有偶数下标的叠核 $K_n(s, t)$ 有正特征值，因此它必是正核。从二次叠核的定义推出，积分 (172) 对于二次叠核可写作形式：

$$\int_a^b\int_a^b K_2(s, t)p(s)p(t)dsdt=\int_a^b\left[\int_a^b K(s, t)p(s)ds\right]^2dt,$$

且从而立卽推出，若基本核是完全核，則它的二次叠核也是完全的。

設核的特征函数系是有限的。不难見到，这样的核不能是完全的。事实上，容易作出次数充分大的多項式与一切特征函数正交。例如，設只有兩个特征函数 $\varphi_1(s)$ 及 $\varphi_2(s)$。我們建立二次多項式与这兩个函数正交。于是引到有三个未知数 α, β, γ 的兩个齐次方程：

$$\alpha\int_a^b s^2\varphi_i(s)ds+\beta\int_a^b s\varphi_i(s)ds+\gamma\int_a^b\varphi_i(s)ds=0, \quad (i=1, 2)。$$

这方程組一定有不等于零的解[III₁; 10]。

26. 特征函数的極值性 对称核的特征值及特征函数具有極值性，它是与代数中关于二次型的特征值的極值性相类似的，且积分(173)起了二次型的作用。

为簡單計，首先設核是正的，亦卽它的一切特征值 λ_k 是正的。考察标准于1的連續函数类；亦卽满足下条件：

$$(174)\qquad \int_a^b p^2(s)\,ds=1$$

的連續函数类，且將在这类函数中寻求这样一个函数，它使积分(173)有最大值。我們認为正特征值排列成不减次序；亦即

$$(175)\qquad 0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots。$$

按照貝塞尔不等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2\leqslant 1,$$

且注意到(175)，我們可写：

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)p(s)p(t)\,ds\,dt\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\sum_{k=1}^{\infty}p_k^2,$$

亦即在条件(174)下，对于积分(173)我們有以下估計：

$$J\leqslant\frac{1}{\lambda_1}。$$

若令$p(s)=\varphi_1(s)$，在这公式中將有等号，因为在这情况$p_1=1$而当$k>1$时，$p_k=0$，亦即在正核的情况，积分(173)的最大值在条件(174)之下等于$\frac{1}{\lambda_1}$，且当$p(s)=\varphi_1(s)$时达到这最大值。

现在提出下面的極值問題。在标准于1的連續函数$p(s)$且与特征函数$\varphi_1(s)$正交的函数类中，亦即在下列条件下：

$$(176_1)\qquad \int_a^b p^2(s)\,ds=1;\quad \int_a^b p(s)\varphi_1(s)\,ds=0,$$

寻求积分(173)的最大值。由于写出的第二条件我們应認为在公式(172)中$p_1=0$，且和前面的討論完全一样，可証在正核的情况积分(173)的最大值在条件(176_1)下等于$\frac{1}{\lambda_2}$，且当$p(s)=\varphi_2(s)$时达到最大值。完全相同的我們可証明，在正核的情况，积分(173)的最大值在条件：

$$\int_a^b p^2(s)\,ds = 1;$$

(176_2)

$$\int_a^b p(s)\varphi_1(s)\,ds = \int_a^b p(s)\varphi_2(s)\,ds = \cdots = \int_a^b p(s)\varphi_{n-1}(s)\,ds = 0$$

之下等于 $\frac{1}{\lambda_n}$，且当 $p(s)=\varphi_n(s)$ 时达到最大值。于是，我們可以說，正核的特征值的倒数，是在函数 $p(s)$满足上述条件时积分(173)的一系列最大值。同时也就确定了使积分 (173) 达到最大值的那些特征函数。

如果核是負的，則我們不应講最大值，而要講到在条件 (176_2) 下积分(173)的一系列最小值。如果核的特征值有正有負，則对于积分的一系列最大值問題导向正特征值的倒数，而对于积分(173)的最小值的問題导向負特征值的倒数。所講这極值問題与以前 [III_1; 39] 对于二次型的極值問題是完全相类似的。此处我們得到的不是特征值本身，而是它們的倒数，这是因为参数 λ 在积分方程中所起的作用跟綫性代数中的作用不同[2]。

对于我們以后很重要的是極值問題的另一种提法。考察滿足下面条件：

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s,t)p(t)\,dt\right]^2 ds = 1 \tag{177}$$

的連續函数类 $p(s)$，亦即我們对函数类的要求，不是連續函数本身标准于 1，而是它的借助于核 $K(s,t)$ 的变换标准于 1。按照定理 II，我們可把变换后的函数展开为絕对且一致收斂的富里埃級数。由于級数的一致收斂性，被展函数与它的富里埃級数的部份和的差的絕对值当富里埃級数的部份和的項数增至無穷大时趋于零。平方中值誤差亦即这差的平方的积分，更加趋于零，在这情况我們有完备性公式：

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s,\ t)p(t)dt\right]^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2}{\lambda_k^2},$$

因之条件(177)可写作形式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2}{\lambda_k^2} = 1。\tag{178}$$

以后將假設核是正的，且將公式(172)的右端写作下面的形式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2}{\lambda_k^2} \lambda_k。$$

將因子 λ_k 代以最小值 λ_1 且利用条件(178)，立即得到对于公式(172)的右端的估計：

$$J \geqslant \lambda_1。\tag{179}$$

若令 $p(s)=\lambda_1\varphi_1(s)$，則 $p_1=\lambda_1$ 且当 $k>1$ 时 $p_k=0$，因此条件(178)已适合，且在公式(179)中我們有等号。于是，第一个特征值 λ_1 是积分(173)在条件(177)下的最小值。若令 $p(s)=\lambda_1\varphi_1(s)$，則这个最小值被达到。与前面所說的完全相同，可以証明，若函数 $p(s)$ 满足下面的条件：

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s,\ t)p(t)dt\right]^2 ds = 1; \quad \int_a^b p(s)\varphi_1(s)ds = 0,$$

則特征值 λ_2 是积分(173)的最小值，且若令 $p(s)=\lambda_2\varphi_2(s)$，則这个最小值被达到。

不难看出，所引出的得到特征值及特征函数的極值原理不仅适用于正核，而且也适用于有有限个負特征值的任何核，亦即它的特征值从第一个开始可按不減次序排列的任何核。我們注意的是，例如，若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3<\lambda_4$，則在条件(177)下积分(173)对 $p(s)=\lambda_1\varphi_1(s)$ 达到最小值，也对 $p(s)=\lambda_1\varphi_2(s)$，对 $p(s)=\lambda_1\varphi_3(s)$ 以及对于系数满足条件 $\frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2}{\lambda_1^2}=1$ 的任何綫性組合 $p(s)=c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)+c_3\varphi_3(s)$ 积分(173)也都达到最小值。这样就把給出积分

的最小值的一切函数$p(s)$都列举無遺。类似的注意对于上面指出的第一个極值問題也适用。

設核有有限个正特征值，且設个数等于$(n-1)$。在条件(174)及补充的正交条件下，依次确定积分(173)的最大值，最后引到条件(176_2)，并显出在这些条件下积分業已不能取正值。事实上，在条件(176_2)下公式(172)的右端只留下負項。这里我們認为λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_{n-1}都是正特征值。

27. 麦色定理 前面我們已經提到过，核的富里埃級数(144)可能是不收斂的。麦色定理肯定的是，若核为正或負，亦即若它的一切特征值有相同符号，则这級数是絕对且一致收斂。因此：若$K(s,t)$是正或負連續核，則有展开式(145)，且級数在正方形k_0內正規收斂。为确定起見，我們假設核是正的。首先証明，对于任何正核有不等式$K(s,s)\geqslant 0$。

事实上，若在正方形k_0的对角綫上存在这样的点$s=t=c$，在这点处$K(c,c)<0$，則在提到的点存在这样鄰域$|s-c|<\varepsilon$及$|t-c|<\varepsilon$，使在这整个鄰域內$K(s,t)<0$。我們可确定这样連續函数$p(s)$，它在区間$c-\varepsilon<s<c+\varepsilon$內有正值，且在这区間外的各处都等于零。对于这个函数將有：

$$J=\int_a^b\int_a^b K(s,t)p(s)p(t)\,ds\,dt=\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}K(s,t)p(s)p(t)\,ds\,dt<0,$$

这与核的正性矛盾。作核

$$K(s,t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}。\tag{180}$$

它的特征值λ_{n+1}, λ_{n+2}, $\cdots$都是正的。应用剛才証明的事实到这个核，得：

$$K(s,s)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k}\geqslant 0,\ \text{亦即}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k}\leqslant K(s,s)。$$

因此立即推出，具有正項的級数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k}$在$s$的任何值都是收斂的，且对于区間$[a, b]$內任何值$s$它的部份和恒小于正数$M$。应用柯西不等式，可写出：

$$\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right|=\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(s)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\cdot\left|\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k}}\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k}}$$

或

$$\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k}}\sqrt{M},$$

由于級数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k}$的收斂性，从而立即推出級数(144)对于固定值$s$在区間$[a,b]$內关于$t$一致收斂。从此，如我們已知道的[**24**]，就推出公式(145)。

利用地尼定理可以証明所提及的級数在k_0內的絕对且一致收斂性，这正如在[**24**]中对于二次疊核所作的完全一样。应指出的是，在定理的証明中只要这个重要事实，即特征值λ_k从某一个起全是正的。正是这个事实給出核(180)的正性。因之，当核$K(s, t)$有有限个負特征值时，証明也保持有效，且一般地，当核仅有有限个正特征值或負特征值时，麦色定理在这情况仍然是正确的。我們指出，核的連續性对于所証定理之成立是十分必需的。

28. 弱極性核的情况　考虑一維弱極性核的情况

$$K(s, t)=\frac{L(s, t)}{|s-t|^{\alpha}},\quad\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)。\tag{181}$$

如在[**17**]中一样，我們引进連續核

$$K_{\gamma}(s, t)=\begin{cases}K(s, t), 当 |s-t|\geqslant\gamma 时;\\ \frac{L(s, t)}{\gamma^{\alpha}}, 当 |s-t|\leqslant\gamma 时。\end{cases}\tag{182}$$

則有下估計：

(183) $$|K_\gamma(s,t)|\leqslant|K(s,t)|\leqslant\frac{C}{|s-t|^\alpha}。$$

作二次叠核：

(184₁) $$K_2(s,t)=\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t)dt_1。$$

由于(181)，对于在 $[a,b]$ 内的任何位置 s 及 t，积分有意义，因为在 s 及 t 重合的最不利的情况时，对于积分号下的函数有下面估計：

$$|K(s,t_1)K(t_1,s)|\leqslant\frac{C^2}{|s-t_1|^{2\alpha}}。$$

我們將証明 $K_2(s,t)$ 在正方形 k_0 内是連續函数。

作函数

(184₂) $$K_2^{(\gamma)}(s,t)=\int_a^b K_\gamma(s,t_1)K_\gamma(t_1,t)dt_1,$$

它在 k_0 内是連續的。只須証明，当 $\gamma\to 0$ 时 $K_2^{(\gamma)}(s,t)$ 在 k_0 内一致地 $\to K_2(s,t)$。我們有：

$$K_2(s,t)-K_2^{(\gamma)}(s,t)=\int_a^b[K(s,t_1)K(t_1,t)-$$
$$-K_\gamma(s,t_1)K_\gamma(t_1,t)]dt_1。$$

若 $|s-t_1|\geqslant\gamma$ 及 $|t-t_1|\geqslant\gamma$，右端的差等于零。注意估計(183)，可写出：

(185) $$|K_2(s,t)-K_2^{(\gamma)}(s,t)|\leqslant$$
$$\leqslant 2C^2\left[\int_{s-\gamma}^{s+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha|t_1-t|^\alpha}+\int_{t-\gamma}^{t+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha|t_1-t|^\alpha}\right]。$$

若 $|s-t|\geqslant 2\gamma$，则区間 $[s-\gamma,s+\gamma]$ 及区間 $[t-\gamma,t+\gamma]$ 彼此不复盖，且我們得：

$$\int_{s-\gamma}^{s+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha|t_1-t|^\alpha}\leqslant\int_{s-\gamma}^{s+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-s|^\alpha\gamma^\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\gamma^\alpha}\left[\int_s^{s+\gamma}\frac{dt_1}{(t_1-s)^\alpha}+\int_{s-\gamma}^{s}\frac{dt_1}{(s-t_1)^\alpha}\right],$$

亦即
$$\int_{s-\gamma}^{s+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-s|^{\alpha}|t_1-t|^{\alpha}}\leqslant\frac{2\gamma^{1-2\alpha}}{1-\alpha},$$

因此

(186) $$|K_2(s,t)-K_2^{(\gamma)}(s,t)|\leqslant\frac{4C^2\gamma^{1-\alpha}}{1-\alpha},\quad(|s-t|\geqslant2\gamma)。$$

现在假定$|s-t|<2\gamma$。这时区間$[s-\gamma, s+\gamma]$及区間$[t-\gamma, t+\gamma]$彼此复盖,且这兩个区間皆包含在以s或t作中心長度为6γ的区間内。利用不等式$ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$,得:
$$\frac{1}{|t_1-s|^{\alpha}|t_1-t|^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{|t_1-s|^{2\alpha}}+\frac{1}{|t_1-t|^{2\alpha}}\right],$$
因之:
$$\int_{s-\gamma}^{s+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-s|^{\alpha}|t_1-t|^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{2}\int_{s-3\gamma}^{s+3\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-s|^{2\alpha}}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t-3\gamma}^{t+3\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-t|^{2\alpha}}\leqslant\frac{1}{1-2\alpha}(3\gamma)^{1-2\alpha},$$
且类似地:
$$\int_{t-\gamma}^{t+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-s|^{\alpha}|t_1-t|^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{1-2\alpha}(3\gamma)^{1-2\alpha},$$
从而,由于(185),

(187) $$|K_2(s,t)-K_2^{(\gamma)}(s,t)|\leqslant\frac{4C^2}{1-2\alpha}(3\gamma)^{1-2\alpha},\quad(|s-t|<2\gamma)。$$

把这与(186)相对照,我們看出$K_2^{(\gamma)}(s,t)$在k_0内一致地$\to K_2(s,t)$,因而$K_2(s,t)$在k_0内是連續函数。

由公式(158)确定的$K_3(s,t)$及其余的核的連續性的証明还要更簡單些。

其次不难証明积分次序的交換的可能性:

(188) $$\int_a^b\left[\int_a^b K(t_1,t)u(t)dt\right]K(s,t_1)dt_1=$$
$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t)dt_1\right]u(t)dt,$$

其中 $u(t)$ 是連續函数。

事实上，在正数 γ_1 及 γ_2 时有对于連續核的类似公式：

$$\int_a^b\left[\int_a^b K_{\gamma_1}(t_1, t)u(t)\,dt\right]K_{\gamma_2}(s, t_1)\,dt_1 = \int_a^b\left[\int_a^b K_{\gamma_2}(s, t_1)K_{\gamma_1}(t_1, t)\,dt_1\right]u(t)\,dt. \tag{189}$$

当 γ_1 趋于零时左端的内积分关于 t_1 一致收斂于积分[17]：

$$\int_a^b K(t_1, t)u(t)\,dt,$$

且右端的内积分一致收斂于积分：

$$\int_a^b K_{\gamma_2}(s, t_1)K(t_1, t)\,dt_1.$$

这可从这样事实推出，卽[17]中的公式 (111) 确定的 $v_\gamma(M)$ 一致收斂于 $v(M)$。当 $\gamma_1\to 0$ 时，在公式(189)中取極限，得：

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(t_1, t)u(t)\,dt\right]K_{\gamma_2}(s, t_1)\,dt_1 = \int_a^b\left[\int_a^b K_{\gamma_2}(s, t_1)K(t_1, t)\,dt_1\right]u(t)\,dt. \tag{190}$$

当 $\gamma_2\to 0$ 时，按前面指出的理由左端的二重积分趋于(188)的左端。公式(190)的右端的内积分关于 t 也一致收斂于公式(188)的右端的内积分。如我們在前面对于积分(184_2)所作过的完全一样可証明这个事实。在公式(190)中取極限得到(188)。

回到[22]。在公式(156)中在 $t_1=t$ 时有弱極性 $(\alpha<\frac{1}{2})$ 的函数 $K(t_1, t)$ 起了 $h(t_1)$ 的作用。这个函数依賴于参数 t。由于核的弱極性，系数的平方 h_k^2 的和作成收斂級数，而在証明[22]的定理二时只应用这个事实。于是可断言对于在区間 $[a, b]$ 的任何 t，級数(157)关于 s 正規收斂。特别是有

$$\sum_k \frac{[\varphi_k(s)]^2}{\lambda_k^2} = K_2(s, s), \quad (a\leqslant s\leqslant b),$$

并且我們已經見到右端是連續函数。按照地尼定理，写出的級数一致收斂，且从不等式

$$|\varphi(s)\varphi(t)| \leqslant \frac{1}{2}\{[\varphi(s)]^2+[\varphi(t)]^2\}$$

推得，若点(s, t)屬于k_0，則級数(157)正規收斂。

前面提到的定理 I 及定理 II 对于弱極性核也將給以証明。

当$n \geqslant 3$时，在公式(158)中起$h(t_1)$的作用的函数$K_{n-1}(t_1, t)$已經是連續的。因此，公式(159)及对应級数的正規收斂性对于弱極性核也是成立的。

完全和前面一样，可以証明在重积分(170)中积分次序的交換是正确的，且因之在[22]，[24]及[25]中的所有結論对于弱極性核都保持有效。

所有結論可以立卽推广到多个变量的情形。

29. 非齐次方程 现在考察具有連續或弱極性的对称核的非齐次方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \tag{191}$$

且首先設λ不是特征值，亦卽不同于一切λ_k。这时方程(191)有唯一解。我們將用特征函数$\varphi_k(s)$来表达它。可写：

$$\varphi(s)=f(s)+g(s), \tag{192}$$

其中

$$g(s)=\lambda\int_a^b K(\cdot, t)\varphi(t)dt。 \tag{193}$$

按照定理 II，函数$g(s)$可展为关于核的特征函数的絕对且一致收斂級数：

$$g(s)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\varphi_k(s)，$$

确定这个展开式的系数。我們不能直接从公式(193)得到它

們,因为在这公式中积分号下有待求函数 $\varphi(t)$。按照(192),以和 $f(t)+g(t)$ 代替它,可写成:

$$g(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)[f(t)+g(t)]dt。 \tag{194}$$

設 f_k 是已給函数 $f(s)$ 的富里埃系数。和 $f(t)+g(t)$ 有富里埃系数 (f_k+g_k),因之按照(152),位于公式(194)的右端可通过积分用核来表示的那个函数有富里埃系数 $(f_k+g_k):\lambda_k$,且由于(194),我們有:

$$g_k=\frac{\lambda(f_k+g_k)}{\lambda_k}。 \tag{195}$$

从这公式可确定系数 g_k:

$$g_k=\frac{\lambda f_k}{\lambda_k-\lambda}, \tag{196}$$

因之,按照(192),方程(191)的解应是下形式:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k\varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}。 \tag{197}$$

現在設 λ 是特征値。为确定起見將假設它的秩等于3,且有 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$。

由于核的对称性,轉置方程与方程(191)相同,因而要这个方程可解的必要且充分的条件是,使得 $f(s)$ 与 $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ 及 $\varphi_3(s)$ 正交,亦即必要且充分的条件是 $f_1=f_2=f_3=0$。假定这条件满足。和前面一样来討論,按照(196),公式(195)給出确定从 g_4 起的一切 g_k 的可能性。

当 $k=1, 2, 3$ 时公式(195)变为恒等式,因为在 $k=1, 2, 3$ 时 $\lambda=\lambda_k$ 及 $f_k=0$。这与我們可把特征函数 $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\varphi_3(s)$ 的任何綫性組合添加到方程(191)的解上的那个事实相适应的。

于是,在所考察的情况,方程(191)的通解有形式:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{k=4}^{\infty}\frac{f_k\varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}+c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)+c_3\varphi_3(s), \tag{198}$$

其中 c_1, c_2, c_3 都是任意常数。

30．在对称核情况的弗列德和蒙工具 应用前面的弗列德和蒙工具的叙述到对称連續核的情况。

在这情况，弗列德和蒙分子 (63) 及解核也都是对称函数。从前我們曾有叠核的展开式 [24]。將这些展开式代入公式 (45)，且假設 λ 滿足条件(40)，因之 $|\lambda|<|\lambda_1|$：

$$R(s,t;\lambda)=K(s,t)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n^2}+\lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n^3}+\cdots。\tag{199}$$

不难看出，若在这級数中以它們的絕对值来代它們的一切值，则得到的有正項的二重級数收斂。事实上，將含 $|\varphi_n(s)||\varphi_n(t)|$ 的諸項合并起来，得到級数：

$$|K(s,t)|+|\varphi_1(s)||\varphi_1(t)|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^k}{|\lambda_1|^{k+1}}+|\varphi_2(s)||\varphi_2(t)|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^k}{|\lambda_2|^{k+1}}+\cdots=$$

$$=|K(s,t)|+\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(s)||\varphi_n(t)|\frac{|\lambda|}{|\lambda_n|(|\lambda_n|-|\lambda|)}。$$

但把这級数与一致收斂級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n(s)||\varphi_n(t)|}{|\lambda_n|^2}\tag{200}$$

比較，我們看出，它們的一般項的比值 $\frac{|\lambda||\lambda_n|^2}{|\lambda_n|(|\lambda_n|-|\lambda|)}$ 不依賴于变量(s,t)且趋于$|\lambda|$，从而显出二重級数(199)的絕对收斂性。因之，在这級数中可合并含有 $\varphi_n(s)\varphi_n(t)$ 的諸項为一項。于是，我們得到解核关于特征函数的展开式：

$$R(s,t;\lambda)=K(s,t)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}。\tag{201}$$

严格地說，我們在 λ 滿足条件(40)的假設下引出这个展开式。但在級数(201)中以它們的絕对值代它的一切項，且和上面一样將所得級数与級数(200)比較，可确信級数(201)对于任何异于 λ_n 的 λ 关于(s, t)絕对且一致收斂。更进一步，这級数在平面 λ 的任何有限区域内关于 λ 是一致收斂的，只要在这級数中去掉在这区域内有極点的前面一些項。于是，公式(201)的右端乃是分函数的簡單分式展开式，且完全和公式(57)一样，它給出解核在整个平面上的解析延拓。特别从公式(201)推出，在对称核的情况每个特征值是解核的簡單極点。要指出，若將展开式(201)代入公式(46)，則得到公式(197)，它給出解关于特征函数的展开式。

在公式(201)中令 $t=s$ 且对 s 积分：

$$\int_a^b R(s, s;\lambda)\,ds=\int_a^b K(s, s)\,ds+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}。$$

但將公式(59)的兩端除以 $D(\lambda)$，得：

$$\int_a^b R(s, s;\lambda)\,ds=-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)},$$

因之，前一公式可写作形式：

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_a^b K(s, s)\,ds+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\lambda-\lambda_n)}。$$

設 λ_0 是 $D(\lambda)$的 r 級零点。我們知道[**III**$_2$; **21**]，对于上面公式的左端 $\lambda=\lambda_0$ 是有留数 r 的單極点。在这公式的右端有某几个数 λ_n 与 λ_0 相等。每一个对应分式可写作形式：

$$\frac{\lambda}{\lambda_n(\lambda-\lambda_n)}=\frac{1}{\lambda-\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n},$$

也就是，每一个这样分式給出在極点 $\lambda=\lambda_0$ 的留数等于 1，因之，在 λ_n 中应有 r 个等于 λ_0。于是我們有下面的定理：在对称核的情况，若 λ_0 是 $D(\lambda)$的 r 級零点，則对应于这个特征值恰好有 r 个綫性無关的特征函数，亦即在对称核的情况 $D(\lambda)$ 的零点的級等于

对应特征值的秩。

我們在前面已經看过，核 $K(s, t)$ 有它自己的关于特征函数系 $\varphi_n(t)$ 的富里埃級数(144)。在公式(201)的右端中以这級数代替 $K(s, t)$，我們确信解核有下面富里埃級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n-\lambda}。 \tag{202}$$

若注意到在公式(201)的右端的級数是一致收斂的，那末我們可断言，級数(202)的一致收斂性与級数(144)的一致收斂性同时發生的，且如果这情况發生，则与公式(145)同时，我們也有公式：

$$R(s,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n-\lambda}。 \tag{203}$$

將(201)的兩端乘以 $\varphi_n(t)$ 且对 t 积分也容易直接得到函数 $R(s,t;\lambda)$ 的富里埃系数。若注意到 $\varphi_n(t)$ 是核 $K(s, t)$ 的特征函数且 $\varphi_n(t)$ 是正交且标准的，于是我們就得到級数(202)的系数：

$$\int_a^b R(s,t;\lambda)\varphi_n(t)dt = \frac{1}{\lambda_n-\lambda}\cdot\varphi_n(s)。$$

这等式表明函数 $\varphi_n(s)$ 都是核 $R(s, t; \lambda)$ 的特征函数，对应于特征值 $(\lambda_n-\lambda)$，此处实值 λ 可任意固定的。不难看出，这是实对称核 $R(s, t; \lambda)$ 的一切特征函数的完全系。事实上，設还存在任何特征函数 $\varphi_0(s)$。若它对应的特征值不同于一切特征值 $\lambda_n-\lambda$，则它应与一切 $\varphi_k(s)$ 正交。若 $\varphi_0(s)$ 对应于某特征值 $\lambda_0-\lambda$，则因 $\varphi_0(s)$ 为新特征函数，它应与 $\varphi_k(s)$ 中对应于同一特征值的諸函数綫性無关。把与提到的特征值对应的特征函数 $\varphi_k(s)$ 的綫性組合加到 $\varphi_0(s)$ 上，我們可这样选擇这綫性組合的系数，使得到的特征函数与剛才提到的一切 $\varphi_k(s)$ 正交。由于在[21]中已証过的定理，这个新特征函数与对应于其他特征值的一切 $\varphi_k(s)$ 正交。于是，我們可簡單地認为新特征函数 $\varphi_0(s)$ 与一切函数 $\varphi_k(s)$ 正交。因之它也与核 $K(s, t)$ 正交[24]。將(201)的兩端乘以 $\varphi_0(t)$ 且对 t 积分，得：

$$\int_a^b R(s,\ t;\ \lambda)\varphi_0(t)dt=0,$$

从而推出 $\varphi_0(s)$ 不是核 $R(s,t;\lambda)$ 的特征函数。因此，諸函数 $\varphi_k(s)$ 不構成核 $R(s,\ t;\ \lambda)$ 的特征函数完全系的假設是荒謬的。

于是我們可以斷定，若取函数 $R(s,\ t;\ \lambda)$ 作为新核，則这核有与基本核相同的特征函数 $\varphi_n(s)$ 的全体，对应的特征值是 $(\lambda_n-\lambda)$。应用公式 (201) 到核 $R(s,\ t;\ \lambda)$，且用 μ 記參数，我們确信这个核的解核是：

$$\widetilde{R}(s,t,\lambda;\mu)=R(s,t;\lambda)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_n-\lambda-\mu)},$$

而按公式(201)展开 $R(s,\ t;\ \lambda)$ 且經簡單运算，我們不难求到：

$$\widetilde{R}(s,t,\lambda;\mu)=K(s,t)+(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n\ [\lambda_n-(\lambda+\mu)]}=$$

$$=R(s,t;\lambda+\mu),$$

亦即若采用 $R(s,t;\lambda)$ 作为新核，則它的解核是函数 $R(s,t;\lambda+\mu)$。

我們指出，因为对于弱極性对称核我們曾得到叠核的展开式且已証明級数 (200) 的一致收斂性，对于这样的核也有展开式 (201)。当 λ 逼近于零时級数 (45) 的收斂性可很簡單地証明，例如，利用公式

$$K_n(s,t)=\int_a^b K_{n-2}(s,t_1)K_2(t_1,t)dt_1$$

及当 $p\geqslant 2$ 时核 $K_p(s,\ t)$ 的連續性。若 λ 不等于 λ_n，則公式 (46) 也是正确的。

31. 埃尔密脱核 我們曾定义对称核是这样的实核，当交换两个变量时它不变。这样的核与綫性代数中的对称矩陣相似。对称矩陣是元素滿足条件 $a_{ki}=\overline{a_{ik}}$ 的埃尔密脱矩陣的特殊情况[III₁; 40]。完全相似地，对称核是埃尔密脱核的特殊情况，这核是由这样性質来定义的，当交换两个变量时它变作自己的共軛值。在一

維情况：

(204) $$K(t,s)=\overline{K(s,t)}。$$

对于这样的核在它們的連續性或弱極性的假設下可以引出前面提过的一切定理。定理 I 也仍然正确。一切特征值是实的，但特征函数却也可能是复的，因而函数系(139)是正交标准复函数系：

$$\int_a^b \varphi_p(s)\overline{\varphi_q(s)}\,ds=\begin{cases}0, & 当\ p\neq q\ 时；\\ 1, & 当\ p=q\ 时。\end{cases}$$

級数(144)有形式：

(144_1) $$\sum_k \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}。$$

这是看作 s 的函数 $K(s,t)$ 关于函数 $\varphi_k(s)$ 的富里埃級数。它也可看作确定在 k_0 内的函数 $K(s,t)$ 关于函数 $\varphi_k(s)\overline{\varphi_l(t)}(k,l=1,2,\cdots)$ 的富里埃級数，而这些函数在 k_0 内成为正交标准系(参閱 [22])。

当它在 k_0 内一致收斂时，有公式：

(145_1) $$K(s,t)=\sum_k \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}。$$

定理二及公式(152)都保持有效。定理 II 也仍是正确的。对于叠核得到展开式：

(159_1) $$K_n(s,t)=\sum_k \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^n},\quad (n=2,3,\cdots),$$

它們在 k_0 内正規收斂。代替(161)我們有：

(161_1) $$\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}=\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt,$$

且代替(162)的是：

(162_1) $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|K(s,t)-\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\right|^2 dt=0。$$

在与核正交的旧定义(168)下，定理三完全保持正确。公式(172)被下面的代替：

$$(172_1)\qquad \int_a^b\int_a^b K(s,t)\overline{p(s)}p(t)\,dsdt=\sum_k\frac{|p_k|^2}{\lambda_k},$$

且此外有关核的分类，有关特征值的極值性質的討論以及 [30] 中的工具等討論在适当地把特征函数代以它的对应共軛函数时都保持有效。一切理論自然也可推广到弱極性埃尔密脫核。非齐次方程(191)仍旧有解(197)。

具有埃尔密脫核的积分方程与具有所謂斜对称核的积分方程[13]有直接关系。如果实核 $K(s, t)$ 满足条件：

$$(205)\qquad K(t, s)=-K(s, t),$$

则把它叫做斜对称核。显然，若 $K(s, t)$ 是斜对称核，则 $iK(s, t)$ 是埃尔密脫核。于是，若有斜对称核的积分方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

则以 λi 代替 λ，得到埃尔密脫核的积分方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b iK(s, t)\varphi(t)\,dt.$$

由此推知斜对称核的方程一定有特征值，且所有这些特征值都是純虛数。

32. 可对称化的方程 現在我們指出在应用上經常遇到的一类方程，它經簡單变換可归結到具有对称核的方程。这方程有形式：

$$(206)\qquad \varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)p(t)\varphi(t)\,dt,$$

其中 $K(s, t)$ 是实对称核，且在区間 $[a,b]$ 內 $p(t)>0$。將兩端乘以 $\sqrt{p(s)}$ 且代替 $\varphi(s)$ 引用新待求函数 $\psi(s)=\sqrt{p(s)}\varphi(s)$，就导出积分方程：

$$\psi(s)=f(s)\sqrt{p(s)}+\lambda\int_a^b L(s, t)\psi(t)\,dt,$$

它具有对称核：

$$L(s,\ t)=K(s,\ t)\sqrt{p(s)p(t)}\text{。}$$

設 λ_k 及 $\psi_k(s)$ 是对应的齐次方程的特征值及特征函数。照例，我們可假設函数 $\psi_k(s)$ 是正交且标准的，亦即：

$$\int_a^b \psi_p(s)\psi_q(s)\,ds=\begin{cases}0, & \text{当 } p\neq q \text{ 时；}\\ 1, & \text{当 } p=q \text{ 时。}\end{cases}$$

利用公式：
$$\psi_k(s)=\varphi_k(s)\sqrt{p(s)},$$

則得到齐次方程：

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,\ t)p(t)\varphi(t)\,dt$$

的特征函数具有带权 $p(s)$ 的正交性及标准性：

$$\int_a^b p(s)\varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds=\begin{cases}0, & \text{当 } p\neq q \text{ 时；}\\ 1, & \text{当 } p=q \text{ 时。}\end{cases}$$

对于二次叠核：

$$L_2(s,\ t)=\int_a^b K(s,\ t_1)K(t_1,t)p(t_1)\sqrt{p(s)p(t)}\,dt_1$$

有展开式：
$$L_2(s,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k(s)\psi_k(t)}{\lambda_k^2}\text{。}$$

从而，約去因子 $\sqrt{p(s)p(t)}$ 后，得到由等式

$$H_2(s,\ t)=\int_a^b K(s,\ t_1)K(t_1,\ t)p(t_1)\,dt_1$$

所确定的函数的展开式：

$$H_2(s,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k^2}\text{。}$$

同样，应用完全归納法，得到函数

$$H_p(s,\ t)=\int_a^b H_{p-1}(s,\ t_1)K(t_1,\ t)p(t_1)\,dt_1$$

的展开式为：

$$H_p(s,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k^p}\text{。}$$

除此以外，有公式：

$$K(s,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k},$$

只要右端的級数在固定任何一个变量时关于另一变量是一致收斂的話。

假定函数 $f(s)$ 是可用核 $L(s,\ t)$ 表示的，亦即：

$$f(s)=\int_a^b L(s,\ t)h(t)\,dt\text{。}\tag{207}$$

那末

$$f(s)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\psi_k(s),\tag{208}$$

其中 $f_k=\int_a^b f(s)\psi_k(s)\,ds=\int_a^b f(s)\sqrt{p(s)}\,\varphi_k(s)\,ds$。

約去(207)及(208)的兩端的 $\sqrt{p(s)}$，我們得到函数

$$F(s)=f(s):\sqrt{p(s)}=\int_a^b K(s,t)\sqrt{p(t)}\,h(t)\,dt$$

的絕对且一致收斂的級数展开式：

$$F(s)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k\varphi_k(s),\tag{209}$$

其中系数按照帶权的通常的富里埃法則确定如下：

$$F_k=\int_a^b p(s)F(s)\varphi_k(s)\,ds\text{。}$$

我們可直接把方程(206)导到具有对称核的方程，只要引用代替 s 及 t 的新变数 x 及 y：

$$x=\int_a^s p(u)\,du;\quad y=\int_a^t p(u)\,du,$$

且由于 $p(u)>0$，当旧变量增加时新变量也增加。代換变量后得到新函数 $f_1(x)=f(s)$，$\omega(x)=\varphi(s)$ 及新对称核 $K_1(x,y)=K(s,t)$，而方程(206)可写作形式：

$$\omega(x)=f_1(x)+\lambda\int_0^l K_1(x,y)\omega(y)dy,\left(l=\int_a^b p(u)du\right)。$$

33. 例 1. 考察[1]中的核，且为简单起见令 $l=1$，亦即：

$$K(s,t)=\begin{cases}s(1-t), & 当 s\leqslant t 时;\\ t(1-s), & 当 s\geqslant t 时,\end{cases}\quad\begin{pmatrix}0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}。\tag{210}$$

在所給情况可找到有限形式的一切特征值及特征函数。在齐次积分方程

$$\varphi(s)=\lambda\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt\tag{211}$$

中，当从 $t=0$ 到 $t=s$ 积分时，亦即当 $t\leqslant s$ 时，我們应当用到表达式 (210) 中的第二式，而当从 $t=s$ 到 $t=1$ 积分时，用表达式的第一式，方程可重写为形式：

$$\varphi(s)=\lambda\int_0^s t(1-s)\varphi(t)dt+\lambda\int_s^1 s(1-t)\varphi(t)dt。$$

將兩端对 s 求导数：

$$\varphi'(s)=-\lambda\int_0^s t\varphi(t)dt+\lambda s(1-s)\varphi(s)+\lambda\int_s^1(1-t)\varphi(t)dt-\lambda s(1-s)\varphi(s)。$$

积分号外的兩項彼此消去后，再对 s 求一次导数，得：

$$\varphi''(s)+\lambda\varphi(s)=0。\tag{212}$$

核(210)显然满足条件 $K(0,t)=K(1,t)=0$，因之公式(211)給出 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$，亦即我們只取方程(212)这样的解，它满足边界条件：$\varphi(0)=\varphi(1)=0$。方程(212)可用初等函数积出来，且我們知道[II；167]，仅当 $\lambda_n=n^2\pi^2$ 时，对这方程提出的边界問題方可有不等于零的解，并且这些解是 $\varphi_n(s)=\sqrt{2}\sin n\pi s$。

直接代入方程(211)中，不难驗証，所提到的数及函数确实是方程(211)的特征值及特征函数。并且，如果注意到，当具备着提及的边界条件时，按上面指出的对于方程的兩端进行微分运算，并没有引入旁的解，那末也就可以相信上述这些数及函数确实是方程(211)的特征值及特征函数。当考察兩端固定絃的振动問題时[II；167]我們業已得出过上述特征值及特征函数。这个事实与我們在[1]中指出过的事实，即核(210)給出在集中力时絃的靜力弯曲，有直接联系。以后將对于广泛一类的数学物理問題推广这个观念。对于所考察的例子級数(144)是一致收斂的，因之有下面公式：

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi s\sin k\pi t}{k^2}=\begin{cases}s(1-t), 当 s\leqslant t 时;\\ t(1-s), 当 s\geqslant t 时,\end{cases}\quad\begin{pmatrix}0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}。\tag{213}$$

设某函数 $f(s)$ 有到二阶的连续导数且满足边界条件 $f(0)=f(1)=0$。对于这样的函数，我们有用核表示的式子如下：

$$f(s)=-\int_0^1 K(s,t)f''(t)dt=-\int_0^s t(1-s)f''(t)dt-\int_s^1 s(1-t)f''(t)dt。$$

应用分部积分法不难验证这式，且这式也可从[1]中关于在连续分布荷重下来确定弯曲时所说过的一切推出来，在这情况应认为荷重等于$f''(t)$。于是，定理 II 指出，满足上面所指条件的任何函数 $f(s)$在区间$[0,1]$内可展为关于函数$\sqrt{2}\sin k\pi s$ 的绝对且一致收敛富里埃级数。以后我们将看到加于函数 $f(s)$身上的条件可大大地减轻。我们注意，公式(213)也表示了它的右端的富里埃级数的展开式。

这级数可看作：它是当右端作为 s 的函数(t 是参数)时该函数关于函数 $\sqrt{2}\sin k\pi s(k=1,2,3,\cdots)$的富里埃级数，或者看作：它是确定在正方形$(0\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1)$内的右端函数关于函数 $2\sin k\pi s\sin l\pi t(k,l=1,2,\cdots)$的富里埃级数，而这些函数在所提及的正方形内成为正交标准系。和前面类似地可考察如下形式的核

$$K(s,t)=\begin{cases}ast+bs+ct+d, & 当\ s\leqslant t;\\ ast+bt+cs+d, & 当\ s\geqslant t\end{cases}$$

(参考 И. И. 普利瓦洛夫，积分方程，1935，第 102 页)。

2. 考察核 $K(s,t)$是差 $s-t$ 的函数：

$$K(s,t)=\omega(s-t),$$

其中 $\omega(x)$是连续偶函数，且有周期 2π。由于函数 $\omega(x)$的偶性，这核是对称核。引入所考察的函数 $\omega(x)$的富里埃系数：

$$c_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(x)\cos kx dx,\quad (k=0,1,2,\cdots),$$

这时由于偶性

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(x)\sin kx dx=0。$$

现在考察下积分

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(s-t)\cos kt dt。$$

作变数代换 $s-t=x$ 且利用 $\omega(x)$的偶性，得：

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(s-t)\cos kt\,dt=\cos ks\int_{s-\pi}^{s+\pi}\omega(x)\cos kx dx,$$

或者注意积分区间的长度等于 2π，最后有：

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(s-t)\cos kt\,dt=\pi c_k\cos ks.$$

同样，得：

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(s-t)\sin kt\,dt=\pi c_k\sin ks.$$

考察齐次积分方程：

$$\varphi(s)=\lambda\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(s-t)\varphi(t)dt,$$

若函数 $\omega(x)$ 的一切富里埃系数都不等于零，则从前面的计算推出，这方程有特征值：

$$\lambda_k=\frac{1}{\pi c_k},\quad (k=0,1,2,\cdots),$$

它们对应于下面的正交标准特征函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2s,\ \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2s,\ \cdots.$$

我们的核没有其他特征函数，因为指出的函数成为完整系［II；155］。当 $k\geqslant 1$ 时特征值 λ_k 对应于两个特征函数。例如，若 $c_1=0$，而其余的 c_k 不等于零，则在特征函数系中消失了两个函数：$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s$ 及 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s$，核就不再是完全的了。

在关于系数 c_n 的任意假设下，级数(144)在这情况有形式：

$$\frac{1}{2}c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\cos ks\cos kt+\sin ks\sin kt)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos k(s-t),$$

亦即这是函数 $\omega(s-t)$ 的富里埃级数。在一般情况，不能肯定它是收敛的。但如果富里埃系数 c_k 满足条件 $c_k\geqslant 0$，则从麦色定理立即推出它是绝对且一致收敛，并且给出 $\omega(s-t)$。若在系数 c_k 中仅有限个是正的或负的，也有相同的结论。

34. 依赖于参数的核 在积分方程理论的叙述中所引入的参数 λ 只是考虑作为核的因子来考虑的。在［30］中我们曾考察有核 $R(s,t;\lambda)$ 的积分方程，而这个核是参数的解析（半纯）函数。

在考察具有参数 λ 的解析函数的核的积分方程时，我们所碰到的规律将与以前叙述的一般理论中的规律有重大的出入。作为最简单的例子我们考

察这样的齐次方程，它的核是 λ 的一次多项式：

$$\varphi(s)=\int_a^b[K_0(s,t)+K_1(s,t)\lambda]\varphi(t)dt,$$

其中 $K_0(s,t)=\rho(s)\rho(t)$； $K_1(s,t)=\sigma(s)\rho(t)$，

且：$\int_a^b[\rho(s)]^2ds=1$； $\int_a^b\rho(s)\sigma(s)ds=0$。

不难驗証写出的齐次方程对于任何 λ 有解：

$$\varphi(s)=\rho(s)+\sigma(s)\lambda。$$

現在考察一般情况，核 $K(s,t;\lambda)$ 满足下面的条件：（1）当 (s,t) 屬于正方形 k_0 及 λ 在复变数 λ 平面上某区域 B 内时，$K(s,t;\lambda)$ 是 s,t,λ 的連續函数；（2）对于在提到的正方形内的一切 (s,t)，$K(s,t;\lambda)$ 是 B 的内部的正則函数。

在积分号前引入补助参数 μ，我們写积分方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\mu\int_a^b K(s,t;\lambda)\varphi(t)dt。$$

我們可以重复［5］及［7］的一切討論，而將这几段的公式中的 λ 代以 μ。于是，我們导出方程的解核：

$$R(s,t;\mu)=\frac{D(s,t,\lambda;\mu)}{D(\lambda,\mu)}。$$

这分式中的分子及分母都是关于变数 μ 的冪級数，且这些級数的系数都是 B 的内部的正則函数。若 λ 含在任何閉区域 B_1 内，而 B_1 在 B 的内部，則提到的級数对于任何 μ 关于 λ 絕对且一致收斂［7］，因之这些級数的和在 B 的内部都是 λ 的正則函数［III_2；12］。令 $\mu=1$，得到方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t;\lambda)\varphi(t)dt。\tag{214}$$

这时有兩种可能情况：（1）在 B 的内部为正則的函数 $D(\lambda;1)$ 不恒等于零；（2）$D(\lambda;1)\equiv0$。在第一种情况，对于不同于 $D(\lambda;1)$ 的零点的一切 λ 方程(214)有解核：

$$R_1(s,t;\lambda)=\frac{D(s,t,\lambda;1)}{D(\lambda;1)}$$

且在含于 B 的内部的任何閉区域 B_1 内只含有有限个这样零点。显然，解核满足方程：

$$(215)\quad \begin{aligned} R_1(s,t;\lambda)&=K(s,t;\lambda)+\int_a^b K(s,t_1;\lambda)R_1(t_1,t;\lambda)dt_1,\\ R_1(s,t;\lambda)&=K(s,t;\lambda)+\int_a^b K(t_1,t;\lambda)R_1(s,t_1;\lambda)dt_1,\end{aligned}$$

且若λ不是$D(\lambda;1)$的零点，则对于任何$f(s)$方程(214)有唯一解：

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b R_1(s,t;\lambda)f(t)dt。$$

若$\lambda=\lambda_0$是$D(\lambda;1)$的零点，则立即推出整函数$D(\lambda_0;\mu)$有零点$\mu=1$，且从[8]中的結果推知，齐次方程

$$(216)\quad \varphi(s)=\int_a^b K(s,t;\lambda)\varphi(t)dt$$

在$\lambda=\lambda_0$时有不为零的解。从而附帶推出$\lambda=\lambda_0$是$R_1(s,t;\lambda)$的極点。事实上，在相反情況，对于任何(s,t)解核$R_1(s,t;\lambda)$在点$\lambda=\lambda_0$是正則的且滿足方程(215)。因方程(215)对于接近λ_0的一些λ值成立，故可讓这些λ值連續趋近于点$\lambda=\lambda_0$，就不难驗証这事。但如果在$\lambda=\lambda_0$时方程(215)成立，从而，方程(214)对于任何$f(s)$有唯一解[6]，且因之齐次方程(216)只有零解。在$D(\lambda;1)\equiv 0$的情況对于含在B的內部的任何λ，方程(216)都显然有解，且非齐次方程(214)不是对于任何自由項都可解的。

从前面的討論推知，在关于核$K(s,t;\lambda)$所作的假設下且$D(\lambda;1)\not\equiv 0$时，特征值在B的內部沒有極限点，亦即在含于B的內部的任何閉区域B_1內只有有限个特征值。若代替核的正則性，我們設它可有不依賴于s及t的極点，則在每一个这样極点的任何小鄰域內可以找到無穷个特征值。例如，若具有連續对称核的方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

有無穷多个特征値λ_n，則$|\lambda_n|\to+\infty$，因而在有極点$\lambda=0$的核$K(s,t,\lambda)$的方程

$$\varphi(s)=f(s)+\frac{1}{\lambda}\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

里，特征值λ_n^{-1}在$n\to\infty$时趋于$\lambda=0$。

但可發生这样事情，对于有極点的核的解核根本沒有奇点。例如，設$R(s;t;\lambda)$是具有对称核的某积分方程的解核。我們知道，它是λ的半純函数，它的極点不依賴于s及t。作积分方程：

$$\varphi(s)=f(s)-\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)\varphi(t)dt,$$

它具有核 $R(s,t;\lambda)$ 且参数 $\mu=-\lambda$。由于在[30]中所說的，这方程的解核等于：

$$R(s,t;\lambda+\mu)\,|_{\mu=-\lambda}=R(s,t;0)=K(s,t),$$

因而它不依賴于 λ。

具有解析地依賴于參數的核的方程，已有一些著作予以研究，特别見于下列各論文中：米耶达(Circolo Matem. di Palermo t., 608,1937)，伊格里希(Mathem. Annal.,Bd. 117,1939) 及 З. И. 哈里洛夫（苏联科学院报告，т. 54，№7，1946）。在这些論文中也指出了这問題的参考文献。

35. 連續函数空間 最后，我們轉到定理 I 及 II 的証明，这些定理曾在[**21**]及[**22**]中叙述且在具有对称核的积分方程理論的叙述时利用过它們。在这些定理的証明时我們要利用現代泛函分析中的思想，概念及符号。在卷五中我們將詳細地叙述相应的材料，而現在只限于叙述与連續函数有关的那些部份。这是因为我們所講的积分方程的全部理論都是对連續函数来講的并且只基于寻常的积分概念（不用勒貝格积分）。我們开始叙述泛函分析中关于連續函数类或所謂連續函数空間的基础概念和結果。

考虑一切实函数的集合，它們在已給有限区間 $[a,b]$ 上都是連續的。这个集合叫做 F 空間。任何在 $[a,b]$ 上連續的一个給定的实函数叫做这空間的元素。以后將用末尾几个希臘字母来記这些元素，更簡單地說，也就是，代替 $\sigma(s)$，$\tau(s)$，$\varphi(s)$，$\psi(s)$，…將只写为 σ，τ，φ，ψ，…。恒等于零的函数叫做零元素。这种函数我們將用数零来記，并將以开头几个拉丁字母 a，b，c，…来記实数。若 $\varphi_k(s)$ 是連續实函数及 c_k 是实数，則含有限項的和 $c_1\varphi_1(s)+$ $+c_2\varphi_2(s)+\cdots+c_m\varphi_m(s)$ 也是連續实函数。因而，空間 F 的元素可乘以实数且相加，并且結果仍然得到 F 的元素。F 中一些元素的綫性無关性归結到所对应函数的綫性無关性[3]。元素 $(-\varphi)$ 对应于函数 $-\varphi(s)$。

两个元素的乘积的积分叫作它們的純量积，且引用对于純量积的通常記号：

(217) $$(\varphi, \psi)=\int_a^b \varphi(s)\psi(s)ds。$$

于是，二元素的純量积是一个数。从积分的初等性質立卽可推出純量积的下面性質：

(218₁) $$(c\varphi, d\psi)=cd(\varphi, \psi);$$

(218₂) $$(\varphi_1+\varphi_2, \psi_1+\psi_2)=(\varphi_1, \psi_1)+ +(\varphi_2, \psi_1)+(\varphi_1, \psi_2)+(\varphi_2, \psi_2)。$$

此外，显然地，

(219) $$(\varphi, \psi)=(\psi, \varphi)。$$

其次：

(220) $$(\varphi, \varphi)=\int_a^b [\varphi(s)]^2 ds,$$

由此可見，$(\varphi, \varphi)\geqslant 0$，并且等号仅对于零元素成立。

(φ, φ)的平方根的算术值叫做元素φ的范数。对于范数采用記号$\|\varphi\|$：

(221) $$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi, \varphi)}=\sqrt{\int_a^b [\varphi(s)]^2 ds}。$$

我們有$\|\varphi\|\geqslant 0$，并且等号仅对于零元素成立。其次，从(218_1)当$c=d$及$\psi=\varphi$时得出：

(222) $$\|c\varphi\|=|c|\cdot\|\varphi\|。$$

应用布里亚柯夫斯基不等式到积分(217)，得：

(223) $$|(\varphi, \psi)|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|\psi\|。$$

从(221)得出：

(224) $$\|\psi-\varphi\|=\|\varphi-\psi\|。$$

其次，由于(218_2)及(219)，有：

$$\|\varphi+\psi\|^2=(\varphi+\psi,\varphi+\psi)=(\varphi,\varphi)+(\psi,\psi)+2(\varphi,\psi)\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2+2\|\varphi\|\cdot\|\psi\|,$$

从而得到三角不等式：

(225) $$\|\varphi+\psi\|\leqslant\|\varphi\|+\|\psi\|。$$

若兩元素 φ 及 ψ 的純量积等于零，則謂这兩元素相互正交或簡称正交。設元素 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m$ 是兩兩正交的。利用(218_2)及(221)的定义，得到畢达哥拉斯定理：

(226) $$\|\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_m\|^2=\|\psi_1\|^2+\|\psi_2\|^2+\cdots+\|\psi_m\|^2。$$

利用范数的概念，引出極限概念。若当下标 n 無限增大时，$\|\varphi-\varphi_n\|\to 0$，或換句話說，若 $\|\varphi-\varphi_n\|^2\to 0$，則把 φ 叫做元素列 φ_n 的極限。这时写作 $\varphi_n=>\varphi$。这与下面：

(227) $$\|\varphi-\varphi_n\|^2=\int_a^b[\varphi(s)-\varphi_n(s)]^2ds\to 0$$

相对等，亦即收斂性 $\varphi_n=>\varphi$ 定义为平均收斂性。对于数我們保持从前極限的記号：$a_n\to a$。不難証明，平均收斂只可有一个極限。事实上，設 $\varphi_n\Rightarrow\varphi$ 及 $\varphi_n\Rightarrow\psi$，可写：

$$\varphi-\psi=(\varphi-\varphi_n)+(\varphi_n-\psi),$$

从而由于(225)，

$$\|\varphi-\psi\|\leqslant\|\varphi-\varphi_n\|+\|\varphi_n-\psi\|。$$

当 n 無限增加时右端趋于零，而左端不依賴于 n，故 $\|\varphi-\psi\|=0$，亦即 $\varphi-\psi$ 是零元素，因之連續函数 $\varphi(s)$ 及 $\psi(s)$ 恒等的，亦即元素 φ 及 ψ 重合。

还应指出的是，若序列 φ_n 有極限，則当 m 及 n 無限增加时 $\|\varphi_m-\varphi_n\|\to 0$。事实上，从公式：

$$\varphi_m-\varphi_n=(\varphi_m-\varphi)+(\varphi-\varphi_n), \quad (\varphi_n\Rightarrow\varphi)$$

得出：
$$\|\varphi_m-\varphi_n\|\leqslant\|\varphi_m-\varphi\|+\|\varphi-\varphi_n\|,$$

且当 m 及 n 無限增加时右端趋于零。現在証明定理：

定理一　表示式 $c\varphi$，$\varphi+\psi$ 及 (φ,ψ) 連續地依賴于数 c 及元素 φ 和 ψ，亦即，若 $c_n\to c$，$\varphi_n\Rightarrow\varphi$ 及 $\psi_n\Rightarrow\psi$，則

$c_n\varphi_n\Rightarrow c\varphi$；$\varphi_n+\psi_n\Rightarrow\varphi+\psi$；$(\varphi_n,\psi_n)\to(\varphi,\psi)$。

写出显明的等式

$$c\varphi-c_n\varphi_n=(c\varphi-c_n\varphi)+(c_n\varphi-c_n\varphi_n)$$

且应用三角不等式到右端的和

$$\|c\varphi-c_n\varphi_n\|\leqslant|c-c_n|\cdot\|\varphi\|+|c_n|\cdot\|\varphi-\varphi_n\|,$$

从而推出 $c_n\varphi_n\Rightarrow c\varphi$。

其次有：

$$(\varphi+\psi)-(\varphi_n+\psi_n)=(\varphi-\varphi_n)+(\psi-\psi_n),$$

从而

$$\|(\varphi+\psi)-(\varphi_n+\psi_n)\|\leqslant\|\varphi-\varphi_n\|+\|\psi-\psi_n\|,$$

因之，

$$\|(\varphi+\psi)-(\varphi_n+\psi_n)\|\to 0,\text{ 亦即 }\varphi_n+\psi_n\Rightarrow\varphi+\psi。$$

最后轉到純量积連續性的証明。需要証明的是 $(\varphi_n,\psi_n)\to(\varphi,\psi)$。我們写→，因为此处極限的过程不是对于 F 的元素，而是对于数的。令：$\varphi_n-\varphi=\sigma_n$ 及 $\psi_n-\psi=\tau_n$。因 $\varphi_n\Rightarrow\varphi$ 及 $\psi_n\Rightarrow\psi$，故范数 $\|\sigma_n\|$ 及范数 $\|\tau_n\|$ 趋于零。

我們有

$$(\varphi,\psi)-(\varphi_n,\psi_n)=(\varphi,\psi)-(\varphi+\sigma_n,\psi+\tau_n)=$$
$$=-(\varphi,\tau_n)-(\sigma_n,\psi)-(\sigma_n,\tau_n),$$

从而，由于(223)：

$$|(\varphi,\psi)-(\varphi_n,\psi_n)|<\|\varphi\|\cdot\|\tau_n\|+\|\sigma_n\|\cdot\|\psi\|+\|\sigma_n\|\cdot\|\tau_n\|。$$

当 n 無限增加时右端趋于零，因之，$(\varphi_n,\psi_n)\to(\varphi,\psi)$。

推論　若 $\varphi_n\Rightarrow\varphi$，則 $\|\varphi_n\|\to\|\varphi\|$。事实上，有：

$$\|\varphi_n\|=\sqrt{(\varphi_n,\varphi_n)}\to\sqrt{(\varphi,\varphi)}=\|\varphi\|。$$

設元素 $\varphi_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是兩兩正交且标准的，亦即

$$(\varphi_p, \varphi_q)=\begin{cases}0, \text{ 当 } p\neq q \text{ 时};\\ 1, \text{ 当 } p=q \text{ 时},\end{cases} \tag{228}$$

且設 φ 是 F 的任意元素。和

$$\sum_{k=1}^{n}(\varphi, \varphi_k)\varphi_k$$

也是 F 中的元素，且它是元素 φ 关于元素 $\varphi_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的富里埃級数。这时容易驗証下面的差

$$\varphi-\sum_{k=1}^{n}(\varphi, \varphi_k)\varphi_k \tag{229}$$

与所有 $\varphi_k(k=1,2,\cdots,n)$ 正交。

还要指出的是，若函数列 $\omega_n(s)$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂于 $\omega(s)$，則在积分 (227) 內可在积分号下取極限，因而我們有 $\omega_n\Rightarrow\omega$。反之，从 $\omega_n\Rightarrow\omega$，不能推出 $\omega_n(s)$ 一致收斂于 $\omega(s)$ [参考 II; 148]。

空間 F 的建立与在綫性代数中空間 R_n 的建立十分相似的。此处我們仅限于实函数。沒有什么困难就可推广到复函数，迟些时將給出这个推广。

有了在 F 中的極限的定义，自然也可考察無穷級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k,$$

其中 ψ_k 是 F 中的元素。若当 n 無限增加时

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\psi_k\Rightarrow\psi,$$

則謂上面写出的級数收斂且它的和是 ψ。按照这里所說的，我們也可考察富里埃無穷級数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi, \varphi_k)\varphi_k。$$

但后面我們沒有用到它。

上面定义的級数的收斂性是平均收斂性，亦卽，無穷級数

$\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k$ 收斂于 ψ 应当了解为

$$\int_a^b\left[\psi(s)-\sum_{k=1}^{n}\psi_k(s)\right]^2 ds\to 0。$$

36. 綫性算子 按照任何的确定規律，从 E 中的任意元素 φ 对应一个也在 E 中的确定元素，則称这样規律为在 E 中的算子。对于算子引用記号 $A, B, \cdots$，于是符号 $A\varphi, B\varphi, \cdots$ 記那样元素，它們是用算子 $A, B, \cdots$ 对应于元素 φ 的元素。

算子的分配性由下列公式定义：

(230) $$A(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_m\varphi_m)=c_1A\varphi_1+c_2A\varphi_2+\\+\cdots+c_mA\varphi_m。$$

若存在这样的数 N，使对于任何元素 φ 有不等式：

(231) $$\|A\varphi\|\leqslant N\|\varphi\|,$$

則称 A 为有界算子。

分配的且有界的算子称为綫性算子。对于实連續核或弱極性核的积分算子可作为綫性算子的例子：

(232) $$A\varphi=\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt。$$

从积分的初等性質显出分配性，而有界性則得自布里亞柯夫斯基不等式：

$$\left[\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt\right]^2\leqslant\int_a^b [K(s, t)]^2dt\cdot\int_a^b[\varphi(t)]^2dt,$$

若其中右端第一个因子对于任何 s 不大于某确定数：

$$\int_a^b[K(s, t)]^2dt\leqslant N_1,$$

而这对于連續核及弱極性核是成立的。將不等式：

$$\left[\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt\right]^2\leqslant N_1\int_a^b[\varphi(t)]^2dt$$

的兩端对 s 积分，得：

$$\|A\varphi\|^2 \leqslant (b-a) N_1 \|\varphi\|^2,$$

取 $N=\sqrt{(b-a) N_1}$ 就是不等式(231)。

若对应任何連續函数的还是这个函数，那末这种算子也是綫性算子的例子。用通常記恒等变换的符号 $\mathscr{E}$ 来記这样算子，就是 $\mathscr{E}\varphi=\varphi$。对于这个算子在公式(231)中可取 $N=1$。

还考察綫性算子 A，它將任何元素 φ 变为乘以某定数 a：亦卽 $A\varphi=a\varphi$。在这情况在公式(231)中可取 $N=|a|$。若 $a=0$，則算子 A 变任何元素 φ 为零元素，亦卽將任何函数 $\varphi(s)$ 乘以零。这个算子將叫做消去算子。消去算子的特征是有这样一件事实：在公式 (231) 中 $N=0$。事实上，若 $N=0$，則从 (231) 推知，对于任何 φ，$\|A\varphi\|=0$，亦卽对于任何 φ，$A\varphi$ 是零元素，因为只在零元素时范数等于零。于是，对于不同于消去算子的任何其他算子，在公式(231) 中 N 必是正数。

以后我們只討論綫性算子，且說到算子时經常指的綫性算子。

若 ω 是零元素[亦卽 $\omega(s)\equiv 0$]，則可写 $\omega=0\varphi$，其中 φ 是任意元素，从而，由于(230)，$A\omega=A(0\varphi)=0A\varphi=\omega$，亦卽任何算子变零元素为零元素。

回到不等式(231)。若 ω 是零元素，則 $A\omega$ 也是零元素，亦卽 $\|A\omega\|=\|\omega\|=0$。这时(231)对于任意选擇的 N 都是正确的。

于是，在考察 (231) 时可以認为 $\|\varphi\|>0$。設 φ 是标准元素，亦卽 $\|\varphi\|=1$。这时(231)可写作如下形式：

(233) $$\|A\varphi\| \leqslant N, \ (\|\varphi\|=1)。$$

不难看出，从(233)推得(231)，反之也是一样。事实上，設 φ 是任意元素，且不同于零元素。这时，由于(222)，$\frac{1}{\|\varphi\|}\varphi$ 是标准元素，且公式(233)給出

$$\left\|A\left(\frac{1}{\|\varphi\|}\varphi\right)\right\| \leqslant N,$$

从而，由于(230)：

$$\left\|\frac{1}{\|\varphi\|}A\varphi\right\|\leqslant N,\text{或}\ \frac{1}{\|\varphi\|}\|A\varphi\|\leqslant N,\text{或}\ \|A\varphi\|\leqslant N\|\varphi\|,$$

亦即从(233)确实推出(231)。于是，可考察(233)来代替(231)，反之也是一样。

若(231)[或(233)]对于某N实现，则它对于一切大于N的値更加实现。自然我們要寻求可能小的值N。

若φ是F中任何标准元素，则$\|A\varphi\|$將是非負数的集合，且这集合中的一切数不大于N。这集合有上确界[I; 42]，我們將用n_A来記这个上确界：

(234) $$n_A=\sup_{\|\varphi\|=1}\|A\varphi\|。$$

这时，按照上确界的定义，在$\|\varphi\|=1$时$\|A\varphi\|\leqslant n_A$，但对于任何正数$\varepsilon$，存在这样标准元素$\varphi$，使$\|A\varphi\|>n_A-\varepsilon$。因此，$n_A$是在公式(231)及(233)中的可能值$N$中的最小值：

(235) $$\|A\varphi\|\leqslant n_A,\ (\|\varphi\|=1)$$

或

(236) $$\|A\varphi\|\leqslant n_A\|\varphi\|。$$

代替公式(234)，我們显然可由下列公式确定n_A：

(237) $$n_A=\sup\frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}=\sup\left\|A\left(\frac{1}{\|\varphi\|}\varphi\right)\right\|,$$

其中φ是任何异于零的元素。

数n_A通常称作算子A的范数。消去算子的这个范数等于零，而任何其他算子的这个范数是正数，这是前面已經可以看到的。我們將給范数以另一定义。

定理二 范数n_A是当$\|\varphi\|=\|\psi\|=1$时$|(A\varphi,\psi)|$的上确界，亦即

(238) $$n_A=\sup|(A\varphi,\psi)|,\ \text{当}\ \|\varphi\|=\|\psi\|=1\ \text{时}。$$

若 A 是消去算子，則对于任何 φ 及 ψ，$(A\varphi,\psi)=0$，因而定理是显然成立的，因为在这情况，$n_A=0$。設 A 不是消去算子。从不等式：

(239) $$|(A\varphi,\psi)|\leqslant\|A\varphi\|\cdot\|\psi\|\leqslant n_A\|\varphi\|\cdot\|\psi\|$$

由此得出

(240) $$|(A\varphi,\psi)|\leqslant n_A,\text{ 当 }\|\varphi\|=\|\psi\|=1\text{ 时。}$$

另一方面，若在純量积 $(A\varphi,\psi)$ 中，代替 ψ 以标准元素 $\frac{1}{\|A\varphi\|}A\varphi$，其中 $A\varphi$ 不是零元素，則得 $(A\varphi,\psi)=\|A\varphi\|$。由于 (234) 可能选取这样标准元素，使 $\|A\varphi\|$ 亦即 $|(A\varphi,\psi)|$ 任意接近于 n_A。这个斷言与 (240) 一起就給出 (238)。应注意的是，在积分算子 (232) 的情况，純量积 $(A\varphi,\psi)$ 由下列公式表达：

$$(A\varphi,\psi)=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\right]\psi(s)ds。$$

交换积分次序，这对于連續核或弱極性核是可能的，得：

(241) $$(A\varphi,\psi)=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\psi(s)ds\right]\varphi(t)dt。$$

若与算子 (232) 同时引入具有轉置核的算子 A^*：

(242) $$A^*\psi=\int_a^b K(s,t)\psi(s)ds,$$

則公式 (241) 記作形式：

(243) $$(A\varphi,\psi)=(\varphi,A^*\psi)。$$

在对称核的情况，算子 A^* 与算子 A 相同，因而公式 (243) 这时采取形式：

(244) $$(A\varphi,\psi)=(\varphi,A\psi)。$$

定义 若对于任何两元素 φ 及 ψ (244) 成立，則算子 A 称为自共軛的。

不仅具有对称核的积分算子是自共軛的。例如，容易驗証，乘

以数的算子也是自共轭的。现在証明对以后很重要的定理:

定理三　自共軛算子的范数是 $|(A\varphi, \varphi)|$ 对于一切可能标准元素 φ 所取数值的上确界。

設

(245) $$d=\sup_{\|\varphi\|=1}|(A\varphi,\varphi)|。$$

我們应該証明的是, $d=n_A$。若 φ 是任何异于零的元素, 則我們也可写:

$$d=\sup\left|\left(A\frac{1}{\|\varphi\|}\varphi, \frac{1}{\|\varphi\|}\varphi\right)\right|=\sup\frac{|(A\varphi,\varphi)|}{\|\varphi\|^2},$$

从而

(246) $$|(A\varphi, \varphi)|\leqslant d\|\varphi\|^2。$$

对于零元素 φ 这关系式是明显的。写出下式:

(247) $$(A(\varphi+\psi),\varphi+\psi)-(A(\varphi-\psi),\varphi-\psi)=4(A\varphi,\psi),$$

这式可以应用公式 (218_2), (219), (230) 及(244)到它的左端而得到。另一方面, 注意(246), 得:

$$\begin{aligned}|(A(\varphi+\psi),\varphi+\psi)-(A(\varphi-\psi),\varphi-\psi)|&\leqslant\\ \leqslant|(A(\varphi+\psi),\varphi+\psi)|+|(A(\varphi-\psi),\varphi-\psi)|&\leqslant\\ \leqslant d(\varphi+\psi,\varphi+\psi)+d(\varphi-\psi,\varphi-\psi)&=\\ =2d(\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2),&\end{aligned}$$

从而, 由于(247):

(248) $$2|(A\varphi,\psi)|\leqslant d(\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2),$$

因之, $|(A\varphi,\psi)|\leqslant d$, 当 $\|\varphi\|=\|\psi\|=1$ 时。

从另一方面, 由于定理二, n_A 是最后不等式的左端的上确界, 因而 $d\geqslant n_A$。为了定理的証明, 余下要証明的是, $d\leqslant n_A$。

按照(238), 我們有: 当 $\|\varphi\|=1$ 时 $|(A\varphi, \varphi)|\leqslant n_A$。但由于定义(245) d 是这不等式的左端当 $\|\varphi\|=1$ 时的上确界, 从而也推出 $d\leqslant n_A$。因此对于自共軛算子:

(249) $$n_A=\sup_{\|\varphi\|=1}|(A\varphi,\varphi)|=\sup\frac{|(A\varphi,\varphi)|}{\|\varphi\|^2}。$$

数值$(A\varphi,\psi)$及$(A\varphi,\varphi)$与綫性代数中的双綫性型及二次型相似[III₁; 40]。它們有时也称为对应于算子A的双綫性泛函及二次泛函。我們在[25]中曾对于具有对称核的积分算子討論过这些值。对于积分算子(232)二次泛函有形式:

(250) $$(A\varphi,\varphi)=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)ds\,dt,$$

并且在連續核或弱極性核的情況右端积分的次序是可以变换的。

基本定理的証明与二次泛函(250)的極值的討論有联系。

利用定理 I 及 II，我們曾在[26]中建立这种观点。此处我們將直接討論这些極值，而不借助于前面叙述的有对称核的积分方程理論的結果。我們可以只对于某类綫性自共軛算子来得到定理 I 及 II 的証明，并且就要單独考察这一类綫性算子。

首先我們注意任何綫性算子的一个性質。設$\varphi_n\Rightarrow\varphi$，亦卽$\|\varphi-\varphi_n\|\to 0$。我們有:

$$\|A\varphi-A\varphi_n\|=\|A(\varphi-\varphi_n)\|\leqslant n_A\|\varphi-\varphi_n\|,$$

因之，$\|A\varphi-A\varphi_n\|\to 0$，亦卽$A\varphi_n=>A\varphi$。因此，从$\varphi_n=>\varphi$，推出$A\varphi_n=A\varphi$，亦卽任何綫性算子是連續的。

現在引入某些新概念。設G是元素φ的集合。若存在这样的数C，使对于G中一切元素φ，有:

(251) $$\|\varphi\|=\sqrt{\int_a^b[\varphi(s)]^2ds}\leqslant C,$$

則G称作关于范数有界的，或簡称为有界的。其次，若从屬于G的任何元素序列可选出有平均收斂意义的極限的子序列，則G称作在平均收斂意义下的致密集合，或簡称为致密集合。

与关于范数有界的集合同时也可考虑元素φ的集合G，它是关于絕对值有界的。对于这样集合应存在这样数C，使G中的一

切函数 $\varphi(s)$ 的絕对値不大于 C，亦即代替(251)以

(252) $$|\varphi(s)|\leqslant C。$$

完全相类似的，若从屬于 G 的任何元素序列可选出有一致收斂意义的極限的子序列，則元素 φ 的集合 G 称作在一致收斂意义下的致密集合。在一致收斂意义下的致密集合也是在平均收斂意义下致密的，因为从一致收斂性就推出平均收斂性。

在[16]中証明的定理可陈述如下面形式：

定理 若 G 中一切元素满足条件(252)且等度連續，則集合 G 在一致收斂意义下是致密的。

現在定义一类綫性算子，它是我們以后將要研究的。

定义 若綫性算子 A 使任何关于范数有界的集合变为在平均收斂意义下的致密集合，則 A 称作全連續算子。

換句話說，若元素 φ 对于固定值 C 滿足条件(251)，則元素集合 $A\varphi$ 应在平均收斂意义下是致密的。

若發現集合 $A\varphi$ 在一致收斂意义下是致密的，則它更是在平均收斂意义下的致密集合。具有这性質的算子称为加强全連續的。

定义 若綫性算子 A 使任何关于范数有界的集合变为在一致收斂意义下的致密集合，則 A 称作加强全連續算子。

如剛才指出的，任何加强全連續算子也是全連續算子。

在下节中我們將对于任何全連續自共軛算子来証明基本定理。但在考察积分算子且确定它們是全連續算子的条件时，我們必須利用以前指出的[16]节中的定理，且因而証明相应的算子是加强全連續算子。在平均收斂意义下的致密性的条件与实变数函数及勒貝格积分理論有联系，我們將于卷五中指出。在那里將在更广泛且更自然的基础上来叙述积分方程理論。

37. 特征値的存在性 考察全連續自共軛算子 A(它不同于

消去算子)及具有参数 μ 的齐次方程:

(253) $$A\varphi=\mu\varphi,$$

它相当于如下形式的积分方程[参考 2]:

(254) $$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt=\mu\varphi(s)。$$

这样一来,方程(253)的特征值就是在积分方程理論的叙述中所談到的特征值的倒数。由于(249),存在这样标准元素列 $\psi_n(n=1, 2, \cdots)$,使

(255) $$|(A\psi_n,\psi_n)|\to n_A,\quad (\|\psi_n\|=1)。$$

因为 $n_A>0$ (因 A 不是消去算子),当 n 充分大时,$(A\psi_n, \psi_n)$不等于零,因而在它們中間或者有無穷多个正数或者有無穷多个負数,或者旣有無穷多个正数又有無穷多个負数。在任何情况从元素列 ψ_n 可选取这样子序列,若保持原来的下标,就可写:

(256) $$(A\psi_n, \psi_n)\to\mu_1,$$

其中

(257) $$\mu_1=n_A$$

或

(258) $$\mu_1=-n_A.$$

作元素:

(259) $$\tau_n=\mu_1\psi_n-A\psi_n,$$

且确定它的范数的平方:

(260) $$\|\tau_n\|^2=(\mu_1\psi_n-A\psi_n,\mu_1\psi_n-A\psi_n)=$$
$$=\mu_1^2(\psi_n,\psi_n)-2\mu_1(A\psi_n,\psi_n)+(A\psi_n,A\psi_n),$$

或,注意到 $\|\psi_n\|=1$ 及 $\|A\psi_n\|^2\leqslant n_A^2=\mu_1^2$:

(261) $$\|\tau_n\|^2\leqslant 2\mu_1[\mu_1-(A\psi_n,\psi_n)]。$$

由于(256),当 $n\to\infty$ 时右端趋于零,因此也有 $\|\tau_n\|\to 0$, 亦即

(262) $$\mu_1\psi_n-A\psi_n\Rightarrow 0。$$

到現在为止，我們沒有用到A是全連續算子这个事实。此刻就要用到它。

元素ψ_n既然是标准的，故它們的集合是有界的，因而序列$A\psi_n$是致密的、从这序列可选取有極限元素的子序列。若保持原来的下标，即可認为序列$A\psi_n$有極限元素。可是在这样情况从(262)就推出序列ψ_n也有極限元素($\mu_1 \neq 0$)。設$\psi_n \Rightarrow \varphi_1$。極限元素$\varphi_1$也和$\psi_n$一样是标准的，这可从[35]定理一得知。在(262)中取極限，且注意到算子A的連續性，得$\mu_1\varphi_1 - A\varphi_1 = 0$，亦即

(263) $$A\varphi_1 = \mu_1\varphi_1 。$$

这样一来，方程(253)有特征值μ_1及对应标准特征元素φ_1。从(263)推出：

(264) $$(A\varphi_1, \varphi_1) = \mu_1 。$$

由上面的討論引出下面的特征值存在定理：

定理 I 若A是在空間F中的全連續自共軛算子，且不是消去算子，則方程(253)有不等于零的特征值μ_1，它的絕对值等于n_A。

38. 特征值列及展开定理 現在不考察一切連續函数的集合F而来考察集合F_2，它的元素φ与φ_1正交(我們設$F_1 = F$)，亦即考察那些实連續函数$\varphi(s)$的集合，它滿足条件

(265) $$(\varphi, \varphi_1) = \int_a^b \varphi(s)\varphi_1(s)ds = 0 。$$

我們指出关于F_2的一个重要事实。如果作F_2中的元素的綫性組合，結果仍旧得到F_2中的元素。事实上，若$(\omega_1, \varphi_1) = (\omega_2, \varphi_1) = 0$，則也有

$$(c_1\omega_1 + c_2\omega_2, \varphi_1) = c_1(\omega_1, \varphi_1) + c_2(\omega_2, \varphi_1) = 0。$$

其次，若ω_n屬于F_2，且$\omega_n \Rightarrow \omega_0$，則$\omega_0$也屬于$F_2$。事实上，从$(\omega_n, \varphi_1) = 0$取極限得$(\omega_0, \varphi_1) = 0$。还要証明，若元素$\tau$屬于

F_2,則 $A\tau$ 也屬于 F_2。事实上,按照条件 $(\tau,\varphi_1)=0$,我們也有:

$$(A\tau,\ \varphi_1)=(\tau,\ A\varphi_1)=(\tau,\ \mu_1\varphi_1)=\mu_1(\tau,\ \varphi_1)=0。$$

这样一来,我們可把算子 A 看作是确定在 F_2 上的自共軛全連續算子。它使 F_2 中的元素仍旧变为 F_2 中的元素。在 [35],[36]及[37]各段中的一切討論以 F_2代替F时都保持有效。

發生了对于算子A在 F_2 中的范数的問題。我們用 ν_2 来記这个范数$(\nu_1=n_A)$。

按照[36]中的定理三,这个范数确定如:

$$\nu_2=\sup_{\|\varphi\|=1}|(A\varphi,\ \varphi)|。\tag{266}$$

在較广泛空間F中,同一算子的范数 n_A 由相似的公式 (249)确定的,其中 φ 不是取自 F_2 而是取自F的。这样一来,ν_2 是較狹小的数集合的上确界,因之可肯定 $\nu_2\leqslant n_A$。在特殊情況,可能出現 $\nu_2=0$,亦卽可能出現 A 是在 F_2 中的消去算子。假設沒有这种情形。重复[37]中的討論,我們相信,如把方程(253)看作是在F_2中的方程,这时它有特征值 μ_2,且对应于 F_2 中的特征标准元素 φ_2:$A\varphi_2=\mu_2\varphi_2$。这时 $|\mu_2|=\nu_2$ 且 $(A\varphi_2,\varphi_2)=\mu_2$。从 $\nu_2\leqslant n_A$ 得到 $|\mu_1|\geqslant|\mu_2|$。

現在作出F中的元素集合 F_3,它的元素滿足兩条件:

$$(\varphi,\ \varphi_1)=(\varphi,\ \varphi_2)=0。\tag{267}$$

关于 F_3 可如前面关于 F_2 那样作相同的肯定,于是可把A看作是确定在 F_3 中的自共軛全連續算子。若这不是消去算子,則如前面一样得到特征值 μ_3 及 F_3 中的标准特征元素 φ_3。这时 $|\mu_3|=\nu_3$,其中 ν_3 是在 F_3 中的算子A的范数。这时 $|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant|\mu_3|$。

照这样繼續进行,得到特征值 $\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\mu_n$ 及对应的兩兩正交且标准的元素 $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n$,且

$$|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\cdots\geqslant|\mu_n|,\tag{268}$$

而$|\mu_k|$是在F_k中的算子A的范数，于是，若

$$(\varphi, \varphi_1)=(\varphi, \varphi_2)=\cdots=(\varphi, \varphi_{k-1})=0,$$

則有

$$|(A\varphi, \varphi)| \leqslant |\mu_k| \cdot \|\varphi\|^2。 \tag{269}$$

假設在構造次一个特征值时，上面的方法不能繼續进行，也就是在由条件

$$(\varphi, \varphi_1)=(\varphi, \varphi_2)=\cdots=(\varphi, \varphi_n)=0 \tag{270}$$

确定的集合F_{n+1}中，算子A是消去算子。

設ω是F中任何元素。作滿足条件(270)的下面一个元素：

$$\varphi=\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega, \varphi_k)\varphi_k, \tag{271}$$

亦即这元素屬于F_{n+1}。照条件我們有：

$$A\left[\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega, \varphi_k)\varphi_k\right]=0,$$

或，展开括弧且注意$A\varphi_k=\mu_k\varphi_k(k=1, 2, \cdots, n)$，得：

$$A\omega=\sum_{k=1}^{n}(\omega, \varphi_k)\mu_k\varphi_k,$$

亦卽任何形如$A\omega$的元素可关于特征元素φ_k展开。不难驗証$(\omega, \varphi_k)\mu_k$都是元素$A\omega$的富里埃系数：

$$(A\omega, \varphi_k)=(\omega, A\varphi_k)=(\omega, \mu_k\varphi_k)=\mu_k(\omega, \varphi_k)。$$

現在設前面指出構造不等于零的特征值μ_s的方法可繼續至無穷次。首先証明特征值序列μ_s趋于零。作相反的假設，設不增正数列μ_s^2有大于零的極限a。因为一切特征元素φ_s的范数等于1，則序列$A\varphi_s$应該是致密的。另一方面，注意φ_s是兩兩正交的，由畢达哥拉斯定理，得：

$$\|A\varphi_m-A\varphi_n\|^2=\|\mu_m\varphi_m-\mu_n\varphi_n\|^2=\mu_m^2+\mu_n^2,$$

且当m及n無限增加时，最后的和有大于零的極限$2a$，从而得出$A\varphi_s$不是致密的。得到的矛盾証明了$\mu_s\to0$。

仍旧考察(271)中的元素，它是屬于 F_{n+1}。在 F_{n+1} 中的算子 A 的范数等于 μ_{n+1}，因之：

$$(272)\quad \left\| A\left(\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega,\ \varphi_k)\varphi_k\right)\right\|^2 \leqslant \mu_{n+1}^2 \left\|\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega,\varphi_k)\varphi_k\right\|^2。$$

但，容易驗証[3]：

$$\left\|\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega,\ \varphi_k)\varphi_k\right\|^2=\|\omega\|^2-\sum_{k=1}^{n}[(\omega,\ \varphi_k)]^2\leqslant\|\omega\|^2,$$

因而从(272)得出：

$$\left\|A\left(\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega,\ \varphi_k)\varphi_k\right)\right\|^2\leqslant\mu_{n+1}^2\|\omega\|^2,$$

且当 $n\to\infty$ 时右端趋于零，从而

$$A\left[\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega,\ \varphi_k)\varphi_k\right]=A\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega,\ \varphi_k)\mu_k\varphi_k\Rightarrow 0,$$

亦卽

$$(273)\qquad A\omega=\sum_{k=1}^{\infty}(\omega,\ \varphi_k)\mu_k\varphi_k,$$

并且無穷級数的收斂性应該了解为这級数的部份和平均收斂于 $A\omega$。

最后，証明 φ_k 是算子 A 的所有綫性無关的特征元素，它們分别与不等于零的特征值对应的。

对应于不同特征值的特征元素是相互正交的。事实上，若 $\mu'\neq\mu''$ 且

$$A\varphi'=\mu'\varphi';\quad A\varphi''=\mu''\varphi'',$$

則从第一方程作与 φ'' 的純量积减去第二方程与 φ' 的純量积，得：

$$\begin{aligned}(\mu'-\mu'')(\varphi',\varphi'')&=(A\varphi',\varphi'')-(\varphi',A\varphi'')=\\&=(A\varphi',\varphi'')-(A\varphi',\varphi'')=0;\end{aligned}$$

亦卽 $(\varphi',\varphi'')=0$。对应于同一个特征值的特征元素可以正交化。

于是，若存在特征元素 τ，与 φ_s 是綫性無关的，且設它对应于不等于零的特征値 μ，則可認为这个元素 τ 与一切 φ_k 正交[参閱 **21**]，亦即 $(\tau, \varphi_k)=0$。

在公式(273)中令 $\omega=\tau$，且注意 $A\tau=\mu\tau$，得 $\mu\tau=0$，亦即 τ 是零元素 $(\mu\neq0)$，这是荒謬的，因为按照条件 τ 是特征元素。这样一来，φ_k 給出綫性無关的特征元素完全系，它們对应于不等于零的特征値。公式(273)給出形如 $A\omega$ 的任何元素关于特征元素 φ_k 的展开式。这样一来，对于自共軛全連續的积分算子，我們得到可用核表示的任何元素

$$F(s)=\int_a^b K(s, t)h(t)\,dt$$

关于特征函数 $\varphi_n(s)$ 的展开式，而收斂性認为是按平均收斂意义的。但我們已看到，$F(s)$关于 $\varphi_n(s)$ 的富里埃級数对于連續核及弱極性核而言在$[a, b]$内是一致收斂的。設 $\Phi(s)$是它的和(連續函数)。

从一致收斂性得出平均收斂性，亦即函数 $F(s)$ 关于 $\varphi_n(s)$ 的富里埃級数也平均收斂于 $\Phi(s)$。但平均收斂的極限是唯一的，而我們在前面已証过 $F(s)$ 的富里埃級数平均收斂于 $F(s)$。因之，$\Phi(s)$与 $F(s)$一致，亦即 $F(s)$关于 $\varphi_n(s)$ 的富里埃級数一致收斂于 $F(s)$。这就証明了[**22**]中定理 II。

在积分方程的理論中代替(253)我們曾用过 $\varphi=\lambda A\varphi$，亦即 $\lambda=\frac{1}{\mu}$。由于証明了 $\mu_n\to0$，故也有 $\lambda_n=\frac{1}{\mu_n}\to\infty$，这是我們从前看到过的。

本段的結果可表述为下面的形式：

定理 II　設 A 是全連續自共軛算子，且不是消去算子，則算子 A 的一切特征値有有限秩且在任何区間 $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ 的外面有有限个特征値。任何形如 $A\omega$ 的元素可展为关于特征元素 φ_k 的富里

埃級数，而收斂性是按平均收斂意义的。

39. 复連續函数空間 我們可把从[35]段起的一切理論也引到复連續函数上去。設 H 是复函数 $\omega(s)=\omega_1(s)+\omega_2(s)i$ 空間，在 $[a, b]$ 上連續的。这时当作函数的綫性組合时可采用任意复系数。純量积由下面公式来确定

$$(\varphi, \psi)=\int_a^b \varphi(s)\overline{\psi(s)}ds. \tag{217$_1$}$$

代替 (218_1) 的有：

$$(c\varphi, d\psi)=c\bar{d}(\varphi, \psi)$$

而代替(219)的是：

$$(\psi, \varphi)=\overline{(\varphi, \psi)}. \tag{219$_1$}$$

范数由下面等式来确定

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi, \varphi)}=\sqrt{\int_a^b |\varphi(s)|^2 ds}. \tag{221$_1$}$$

算子的自共軛性仍旧被公式 (244) 定义着。对于自共軛算子来說 $(A\varphi, \varphi)$ 的値总是实数，因为 $(A\varphi, \varphi)=(\varphi, A\varphi)=\overline{(A\varphi, \varphi)}$，而等于它本身的共軛数的数是实的。自共軛算子只有实特征値，因为从 $A\varphi=\mu\varphi$ 推出：$(A\varphi, \varphi)=\mu\|\varphi\|^2$，这式給出 μ 的实性。

我們指出在 [36] 节定理三的証明中必須引起的改变。代替(248)的將是

$$2|R(A\varphi, \psi)|\leqslant d[\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2], \tag{248$_1$}$$

其中 R 是实部符号。我們証明，由此推得对于 $(A\varphi, \psi)$ 的范数也有同样不等式，亦即

$$2|(A\varphi, \psi)|\leqslant d[\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2]. \tag{248}$$

設 $(A\varphi, \psi)=re^{i\beta}$，其中 r 及 β 是 $(A\varphi, \psi)$ 的模及幅角。

在不等式 (248_1) 中元素 φ 是任意的，因而可用 $e^{-i\beta}\varphi$ 来代替它。得：

$$2|Re^{-i\beta}(A\varphi, \psi)|\leqslant d[\|e^{-i\beta}\varphi\|^2+\|\psi\|^2].$$

如果注意到，$|e^{-i\beta}|=1$ 且 $(A\varphi, \psi)=re^{i\beta}$，則上面的不等式可写作：

$$2|Rr|\leqslant d[\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2]。$$

但 r 的实部是 r 本身，亦即

$$2r\leqslant d[\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2] \text{ 或 } 2|(A\varphi, \psi)|\leqslant d[\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2],$$

这就是要求証明的。其余的一切討論与前面相同。

和上面一样，在复連續函数空間中的全連續自共軛算子的这个理論給出具有埃尔密脫核的积分方程的特征值存在定理及展开定理。

40. 积分全連續算子 考察积分算子

$$\psi(s)=\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \tag{274}$$

且探求在空間 F 中它是加强全連續算子的条件。首先必須写出的积分对于任意选擇的連續函数 $\varphi(t)$ 有意义，而且要 $\psi(s)$ 也是連續函数。如果 $K(s, t)$ 是連續的或弱極性的 [17]，这要求一定会达到。

作差

$$\psi(s+h)-\psi(s)=\int_a^b [K(s+h, t)-K(s, t)]\varphi(t)dt$$

且应用布里亞柯夫斯基不等式

$$|\psi(s+h)-\psi(s)|^2\leqslant\int_a^b |K(s+h, t)-$$
$$-K(s, t)|^2dt\cdot\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt。$$

且类似地从(274)：

$$|\psi(s)|^2\leqslant\int_a^b |K(s, t)|^2dt\cdot\int_a^b |\varphi(t)|^2dt。$$

設有关于范数有界的函数集合 $\varphi(t)$，亦即

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2dt\leqslant C^2, \tag{275}$$

由于上面不等式，从而，

(276) $$|\psi(s)|^2 \leqslant C^2\int_a^b |K(s,t)|^2 dt;$$

(277) $$|\psi(s+h)-\psi(s)|^2 \leqslant C^2\int_a^b |K(s+h,t)-K(s,t)|^2 dt.$$

現在假定核 $K(s,t)$ 满足下面兩个条件：

（1）存在这样数 M^2，使

(278) $$\int_a^b |K(s,t)|^2 dt \leqslant M^2, \quad (a\leqslant s\leqslant b);$$

（2）对于任何已給正数 ε，存在这样正数 η，当 $|h|<\eta$ 时，使

(279) $$\int_a^b |K(s+h,t)-K(s,t)|^2 dt \leqslant \varepsilon.$$

这时，由于(276)及(277)，函数集合 $\psi(s)$ 是关于模有界的且等度連續的，亦即在一致收斂意义下是致密集合，而算子(274)是加强全連續的。

显然，条件(278)及(279)在核是連續时可实現。条件(278)对于弱極性核也实現[28]。不难証明，条件(279)对于弱極性核也实現。为了确信这件事，只須重复对于在[17]中引用的积分(106)的討論，且代替不等式

$$|K(s+h,t)-K(s,t)| \leqslant |K(s+h,t)|+|K(s,t)|$$

必須用以下不等式

$$|K(s+h,t)-K(s,t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left[|K(s+h,t)|^2+|K(s,t)|^2\right].$$

这样一来，具有連續核及弱極性核的积分算子都是在 F 中的加强全連續算子。

此外，若核是埃尔密脫的（或实对称的），則算子是自共軛的，因而前面所述的一切理論都可应用。

还要証明，若在[17]中指出的連續核或極性核在 k_0 内不恒等

于零，則算子(274)不是消去算子。

設連續核 $K(s, t)$ 是实的且在某点 (s_0, t_0) 不等于零。

設 $K(s_0, t_0)>0$。由于核的連續性，存在这样正数 δ，当 $|t-t_0|\leqslant\delta$ 时，$K(s_0, t)>0$。其次，設有連續函数 $\varphi(t)$，当 $|t-t_0|<\delta$ 时它是正的，且当 $|t-t_0|\geqslant\delta$ 时它等于零。將这函数代入(274)且令 $s=s_0$，得

$$\psi(s_0)=\int_a^b K(s_0, t)\varphi(t)dt=\int_{|t-t_0|<\delta}K(s_0, t)\varphi(t)dt>0,$$

且因之連續函数 $\psi(s)$ 不恒等于零，而算子(274)不是消去算子。若注意于 $L(s, t)$ 的連續性，对于極性核也可同样討論。对于复核的討論也完全相似的。

利用勒貝格积分概念，可以証明积分

$$\int_a^b\int_a^b|K(s, t)|^2 ds\, dt$$

的有限性是使算子(274)为全連續的充分条件。

41. 正規算子 設 A_1 及 A_2 是在空間 H 中的兩个綫性算子。若 φ 是任何元素，則运用算子 A_2 到元素 $A_1\varphi$ 上，得到元素 $A_2(A_1\varphi)$，因而相繼应用算子 A_1 及 A_2 的結果也是某个算子，通常記它为 A_2A_1[参考 **III**$_1$; **21**]:

$$(A_2A_1)\varphi=A_2(A_1\varphi). \tag{280}$$

不难看出，A_2A_1 是綫性算子。

从 A_1 及 A_2 的分配性立卽得出 A_2A_1 的分配性，而从 A_1 及 A_2 的有界性推出 A_2A_1 的有界性：

$$\|A_2(A_1\varphi)\|\leqslant n_{A_2}\|A_1\varphi\|\leqslant n_{A_1}n_{A_2}\|\varphi\|.$$

也可以定义算子 A_1A_2，它是相繼地先应用算子 A_2 然后应用算子 A_1 得来的：

$$(A_1A_2)\varphi=A_1(A_2\varphi). \tag{281}$$

这时，一般地說綫性算子 A_1A_2 不同于 A_2A_1。

設 A_1 及 A_2 是积分算子：

$$\psi(s)=\int_a^b K_1(s, t)\varphi(t)dt, \tag{A_1}$$

(A_2) $$\psi(s)=\int_a^b K_2(s,\ t)\varphi(t)\,dt。$$

对于算子 A_2A_1 及 A_1A_2 我們得到下面表达式：

(A_2A_1) $$\psi(s)=\int_a^b K_2(s,\ t_1)\left[\int_a^b K_1(t_1,t)\varphi(t)\,dt\right]dt_1,$$

(A_1A_2) $$\psi(s)=\int_a^b K_1(s,\ t_1)\left[\int_a^b K_2(t_1,t)\varphi(t)\,dt\right]dt_1,$$

或，如果积分次序可交换：

(A_2A_1) $$\psi(s)=\int_a^b\left[\int_a^b K_2(s,t_1)K_1(t_1,t)\,dt_1\right]\varphi(t)\,dt,$$

(A_1A_2) $$\psi(s)=\int_a^b\left[\int_a^b K_1(s,t_1)K_2(t_1,t)\,dt_1\right]\varphi(t)\,dt,$$

就是說，算子 A_2A_1 及 A_1A_2 是具有下面这种核的积分算子：

$$K_{21}(s,\ t)=\int_a^b K_2(s,\ t_1)K_1(t_1,t)\,dt_1\quad(\text{对于 } A_2A_1 \text{ 的核}),$$

$$K_{12}(s,\ t)=\int_a^b K_1(s,t_1)K_2(t_1,t)\,dt_1\quad(\text{对于 } A_1A_2 \text{ 的核})。$$

若算子 A_2A_1 及 A_1A_2 是相同的，則謂算子 A_1 及 A_2 是可交換的。在积分算子的情况，如果上面指出的积分次序的交換为可能，則核 $K_{21}(s,t)$ 及 $K_{12}(s,t)$ 的一致保証了算子 A_1 及 A_2 的可交換性（可以証明，这也是对于連續核或極性核具有可交換性的必要条件）。

若 c_1 及 c_2 是常数，就能够定义 c_1A_1 及 $c_1A_1+c_2A_2$ 如下公式：

$$(c_1A_1)\varphi=c_1(A_1\varphi);\quad (c_1A_1+c_2A_2)\varphi=c_1A_1\varphi+c_2A_2\varphi。$$

在积分算子的情况，算子 $c_1A_1+c_2A_2$ 是具有核 $c_1K_1(s,\ t)+c_2K_2(s,t)$ 的积分算子。

取具有連續核或弱極性核的积分算子：

(A) $$\psi(s)=\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)\,dt,$$

且建立具有也是連續的或弱極性的核 $K^*(s,\ t)=\overline{K(t,s)}$ 的所謂共軛算子 A^*：

(A^*) $$\psi(s)=\int_a^b \overline{K(t,s)}\,\varphi(t)\,dt。$$

对于任何元素 φ 及 ψ，我們有[参閱 36]：

(282) $$(A\varphi,\psi)=(\varphi,\ A^*\psi)。$$

建立算子

(283) $$A_1=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A^*;\quad A_2=\frac{1}{2i}A-\frac{1}{2i}A^*。$$

这是具有如下形式的連續核或弱極性核：

$$\frac{1}{2}\left[K(s,t)+\overline{K(t,s)}\right]\text{ 及 }\frac{1}{2i}\left[K(s,t)-\overline{K(t,s)}\right]$$

的积分算子。不难看出，它們都是埃尔密脫核，因之 A_1 及 A_2 是在复連續函数空間 H 中的自共軛加强全連續算子。算子 A 及 A^* 可按下列公式用 A_1 及 A_2 来表达：

(284) $$A=A_1+iA_2,\quad A^*=A_1-iA_2。$$

現在区別出某一类算子，对于这样一类的算子来說，我們能进行以前自共軛全連續算子的理論的叙述。

定义 設积分算子 A 与 A^* 可交换，亦即若 $A^*A=AA^*$，則 A 称作正規算子。

利用前面所說的，我們可写出积分算子的正規性的条件（充分的）：

(285) $$\int_a^b K(s,t_1)\overline{K(t,t_1)}dt_1=\int_a^b\overline{K(t_1,s)}K(t_1,t)dt_1。$$

这时自然要認为在作成算子 AA^* 及 A^*A 时可能交换积分的次序。若核是連續的或弱極性的，这变换就可能。

若 A 与 A^* 可交换，則从 (283) 立即得出 A_1 及 A_2 也可交换的。設核 $K(s,t)$ 是这样的核，使 A 及 A^* 都是全連續算子且 A 与 A^* 可交换，亦即 A 是正規算子。在以后的叙述中我們將不利用 A 是积分算子这一事实。对于我們很重要的只是对于任何 φ 及 ψ 等式 (282) 成立，A 及 A^* 是可交换的以及这两个算子都是全連續的。这时从 (283) 可推出自共軛算子 A_1 及 A_2 也是可交换的。

只要利用 (282)，我們就可以証明，例如 A_1 的自共軛性。从 (282) 推出 $(A^*\varphi,\psi)=(\varphi,A\psi)$。其次：

$$(A_1\varphi,\psi)=\left(\frac{1}{2}A\varphi+\frac{1}{2}A^*\varphi,\psi\right)=\frac{1}{2}(A\varphi,\psi)+\frac{1}{2}(A^*\varphi,\psi)=$$

$$=\frac{1}{2}(\varphi,A^*\psi)+\frac{1}{2}(\varphi,A\psi)=\left(\varphi,\frac{1}{2}A^*\psi+\frac{1}{2}A\psi\right)=(\varphi,A_1\psi),$$

亦即 $(A_1\varphi,\psi)=(\varphi,A_1\psi)$，从而得到 A_1 的自共軛性。

設 μ_k 及 φ_k 是自共軛全連續算子 A_1 的特征值及兩兩正交的标准特征元

素：

(286) $$A_1\varphi_k=\mu_k\varphi_k\text{。}$$

对兩端应用算子 A_2 且注意 A_1 及 A_2 是可交換的，得：

$$A_1(A_2\varphi_k)=\mu_k(A_2\varphi_k),$$

从而可看出元素 $A_2\varphi_k$ 是算子 A_1 的特征元素，它对应于特征値 μ_k；或 $A_2\varphi_k$ 是零元素。

設 μ_k 是秩等于 h 的特征值，且設 $\mu_k=\mu_{k+1}=\cdots=\mu_{k+h-1}$。这时，由于前面所述，必須有：

$$A_2\varphi_p=\sum_{q=k}^{k+h-1}c_{pq}\varphi_q,\quad(p=k,\ k+1,\cdots,\ k+h-1)$$

且 $$c_{pq}=(A_2\varphi_p,\varphi_q)=(\varphi_p,A_2\varphi_q)=\overline{(A_2\varphi_q,\varphi_p)}=\overline{c_{qp}},$$

亦卽 c_{pq} 成为埃尔密脫矩陣。

我們可在 $\varphi_p\ (p=k,\ k+1,\cdots,k+h-1)$ 上作任何 U 变換 [III$_1$; 28]，仍旧得到算子 A_1 的正交且标准的特征元素系，它們对应于特征値 $\mu=\mu_k$。其次，我們可选取这个 U 变換，使埃尔密脫矩陣 c_{pq} 化为对角綫形式。

設 $\nu_k,\ \nu_{k+1},\cdots,\nu_{k+h-1}$ 是这个对角矩陣的对角綫元素（它們是实的）。这样一来，如果保持以前的特征元素的記号，我們就有：

$$A_1\varphi_p=\mu_p\varphi_p;\quad A_2\varphi_p=\nu_p\varphi_p,$$
$$(p=k,\ k+1,\cdots,k+h-1;\quad \mu_k=\mu_{k+1}=\cdots=\mu_{k+h-1}),$$

并且在数 ν_p 中某几个或甚至这些数的全体可能等于零。对于所有不等于零的特征值进行这个手續。在这以后我們也許不能获得算子 A_2 的一切不等于零的特征值。取算子 A_2 的这些沒有获得的不等于零的特征値，且实行从 A_2 出發的类似手續并过渡到 A_1。末了我們得到有限个或無穷个元素 $\varphi_k(k==1,2,\cdots)$，它們是兩兩正交且标准的，使

(287) $$A_1\varphi_k=\mu_k^{(1)}\varphi_k;\quad A_2\varphi_k=\mu_k^{(2)}\varphi_k,$$

并且兩实数 $\mu_k^{(1)}$ 及 $\mu_k^{(2)}$ 中至少有一个不为零，而对应于不等于零的特征値的 A_1 的任何特征元素用有限个 φ_k 綫性表出，对于 A_2 也有类似情况。从(287)及(284)立卽得出：

$$A\varphi_k=(\mu_k^{(1)}+\mu_k^{(2)}i)\varphi_k;\quad A^*\varphi_k=(\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}i)\varphi_k,\quad(k=1,\ 2,\ \cdots),$$

亦卽复数 $\sigma_k=\mu_k^{(1)}+\mu_k^{(2)}i$ 都是正規算子 A 的特征値，且 φ_k 是对应的特征元素。

对于正規算子 A 也不难获得展开定理，在[38]中对于自共軛全連續算子已經証过了。由于那一段中最后定理，对于任意选擇的元素 ω，我們有：

(288) $$A_1\omega=\sum_k(\omega,\varphi_k)\mu_k^{(1)}\varphi_k;\quad A_2\omega=\sum_k(\omega,\varphi_k)\mu_k^{(2)}\varphi_k,$$

因而从(284)得到：

(289) $$A\omega=\sum_k(\omega,\ \varphi_k)\,(\mu_k^{(1)}+\mu_k^{(2)}i)\,\varphi_k,$$

并且收歛性应認为是平均收歛意义的。如同在[38]中一样，可驗証这級数的系数都是 $A\omega$ 的富里埃系数。应注意的是，若某一个 $\mu_m^{(1)}=0$，則在 $A_1\omega$ 的展式中自然不出現有 φ_m 的項，对于 $A_2\omega$ 也有类似情况。

这样一来，对于正規算子也証明了特征值存在定理及展开定理。

如在[38]已經看过的，在关于核 $K(s,t)$ 的所作假設下（連續的或弱極性的），級数(273)在$[a,b]$内絕对且一致收歛。因之，关于級数(289)也有一样的論断，因而同[38]中一样，可肯定这級数的和等于 $A\omega$。

考察下面由核表示的函数：

$$\int_a^b K(s,t_1)\overline{K(t,t_1)}\,dt_1\text{。}$$

它关于函数系 $\varphi_k(s)$ 的富里埃系数等于 $(\sigma_k)^2\overline{\varphi_k(t)}$，因此有：

$$\int_a^b K(s,t_1)\overline{K(t,t_1)}\,dt_1=\sum_k|\sigma_k|^2\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)},$$

并且級数在$[a,b]$内一致收歛。令 $t=s$ 且对 s 积分，得：

$$\sum_k|\sigma_k|^2=\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dt\,ds,$$

或者照以前的記号：

(290) $$\sum_k\frac{1}{|\lambda_k|^2}=\int_a^b\int_a^b|K(s,\ t)|^2dt\,ds\text{。}$$

这样一来，对于正規核也証明了与(161)类似的公式。可以証明，若核不是正規核，則公式(290)就不能成立（И. А. 哥尔德法伊，莫斯科大学学报，1946）。我們指出，埃尔密脫核是正規核的特殊情形，因为对于它 $A^*=A$，且 A 及 A^* 的可交換性是很明显的。

42. 多变量的函数的情况 我們曾定义空間 F 为在有限区間$[a,b]$上是連續的实或复函数的集合。完全相似地我們可定义空間 F 为函数 $\varphi(M)$ 的集合，而 $\varphi(M)$ 在平面上，曲面上或三維空間内某有限閉区域 B 内是連續的。前面的一切叙述在这情况也可适用。各处的积分应該对这区域 B 进行。也像一个独立变量的情况

一样，具有連續核或弱極性核的积分算子在F中是加强全連續算子。

43. 渥尔特拉方程 轉到討論在一維情况的渥尔特拉的第二种方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt. \tag{291}$$

以前已經指出，这方程是弗列德和蒙方程的特殊情况，也就是設在$t>s$时，$K(s,t)=0$的情况，亦即核在正方形k_0的对角綫$s=t$的一边的半个正方形内等于零时的情况。我們假設，自由項$f(s)$在某区間$a\leqslant s\leqslant b$内是連續函数，且$K(s,t)$在$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant s$时是連續函数且当$t>s$时，$K(s,t)=0$。这样一来，若$K(s,s)\neq 0$，則核在对角綫$s=t$上有第一种不連續点。在[**5—11**]各段中的基本定理及工具皆完全保持有效[**14**]。

和从前一样，我們写它的解为級数形式：

$$\varphi(s)=\varphi_0(s)+\varphi_1(s)\lambda+\varphi_2(s)\lambda^2+\cdots, \tag{292}$$

对于函数$\varphi_n(s)$得到下面公式：

$$\varphi_0(s)=f(s);\quad \varphi_n(s)=\int_a^s K(s,t)\varphi_{n-1}(t)dt$$

$$(n=1,2,\cdots)。$$

設在有限区間或正方形上对連續函数有如下估計：

$$|f(s)|\leqslant m;\quad |K(s,t)|\leqslant M,$$

从而进行$\varphi_n(s)$的估計，相繼地得到：

$$|\varphi_0(s)|\leqslant m;\quad |\varphi_1(s)|\leqslant\int_a^s|K(s,t)||\varphi_0(t)|dt\leqslant mM(s-a),$$

$$|\varphi_2(s)|\leqslant\int_a^s|K(s,t)||\varphi_1(t)|dt\leqslant mM^2\int_a^s(t-a)dt=$$

$$=mM^2\frac{(s-a)^2}{2!},$$

且一般地：
$$|\varphi_n(s)| \leq m\frac{[M(s-a)]^n}{n!}。$$

当变量 s 在有限区間 $[a, b]$ 上时，級数(292)的項的模不大于正数：

$$m\frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!},$$

对于任何 λ，用这正数作成的級数是收斂的，因之級数 (292) 在 $[a, b]$ 上絕对且一致收斂，而它的和 $\varphi(s)$ 是連續函数且滿足方程 (291)。

完全和[5]中一样，可以作出解核：

$$R(s, t; \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(s, t)\lambda^n, \tag{293}$$

其中

$$K_1(s, t)=K(s, t); \quad K_n(s, t)= \tag{294}$$
$$=\int_a^s K_{n-1}(s, t_1)K(t_1, t)dt_1, \quad (n=2, 3, \cdots),$$

且从这些公式，得出当 $t>s$ 时 $K_n(s, t)=0$。事实上，若 $t>s$，則 $t_1<t$ 且 $K(t_1, t)=0$。

和前面一样，可証明級数(293)对于一切值 λ 的絕对且一致收斂性。这样一来，渥尔特拉方程(291)的解核是整函数，且对于任何 λ 这方程有唯一解，它被下列公式确定[6]：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^s R(s, t; \lambda)f(t)dt。 \tag{295}$$

因而可以肯定渥尔特拉方程沒有特征值，亦即齐次方程：

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^s K(s, t)\varphi(t)dt$$

对于任何 λ 只有零解。因此，若作方程 (291) 的弗列德和蒙分母 $D(\lambda)$，則可發現它根本沒有任何零点[8]。

可以証明，若核有形式：

$$K(s,t)=\frac{L(s,t)}{(s-t)^{\alpha}},\quad (s>t),$$

其中 $L(s,t)$ 是連續函数，且 $0<\alpha<1$，則方程(291)仍旧有唯一解，且这个解可由前面指出的逐次逼近法获得。这时核 $K_n(s,t)$ 从某值 n 开始是連續的。当 $\alpha<\frac{1}{2}$ 时，核 $K_2(s,t)$ 業已是連續的[28]。

正是一样，逐次迫近法也可应用到方程組：

$$\varphi_i(s)=f_i(s)+\lambda\sum_{k=1}^{m}\int_a^s K_{ik}(s,t)\varphi_k(t)dt。\tag{296}$$

在所作的假設下，渥尔特拉方程的特征是这个事实，由逐次迫近法获得的級数对于在提过的区間內对一切值 λ 是收斂的。若对于一切 $s\geqslant a$ 保持連續性条件，則得到对于一切 $s\geqslant a$ 的解。

考察具有兩个变限的方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_{\omega(s)}^{s}K(s,t)\varphi(t)dt,\tag{297}$$

或方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^{\omega(s)}K(s,t)\varphi(t)dt。\tag{298}$$

令 s 在某区間 $[a,b]$ 內变动，且使 $f(s)$ 及 $K(s,t)$ 保持通常連續性条件，且除此以外，設在所指区間內，有：$a\leqslant\omega(s)\leqslant s$。显然，存在这样正数 N 及 M，使当 $a\leqslant s,t\leqslant b$ 时，有：

$$|f(s)|\leqslant N;\quad |K(s,t)|\leqslant M。$$

在方程(297)或(298)中代替 $f(s)$ 及 $K(s,t)$ 以較大的正数 N 及 M，且代替 $(\omega(s),s)$ 或 $(a,\omega(s))$ 以較大区間 (a,s)：

$$\varphi(s)=N+\lambda M\int_a^s\varphi(t)dt。\tag{299}$$

应用逐次逼近法到后一方程，容易証明，归結到关于 λ 的冪級数，而这冪級数的系数都是正的，且不小于当解方程(297)或(298)时获得的冪級数的系数的絕对值。方程(299)具有寻常的形式，且

当 $t\leqslant s$ 时，常数 M 起着 $K(s, t)$ 的作用，且对应的幂級数对于任何 λ 在区間 $[a, b]$ 內关于 s 一致收斂。关于解方程 (297) 及 (298) 所得的級数更可同样地肯定，且这級数給出方程的解。我們看出，方程 (299) 的解被表达为有限形式，亦即

$$\varphi(s)=Ne^{\lambda M(s-a)}。$$

也要注意到，例如，方程(297)可写为寻常形式(291)，只要設核服从条件：当 $t<\omega(s)$ 时，$K(s, t)=0$。

在方程(291)的积分中，我們可交換积分的上下限，同时也改变核的符号。这样一来，变量是积分的上限这件事情，在理論上不是很重要的。正是一样的可代替不等式 $s\geqslant a$ 以規定的条件 $s\leqslant a$。当用簡單变換 $s'=-s$ 及 $t'=-t$ 可从一个情况变为另一情况。按类似方式，例如，在方程(297)中，可代替上面指出的对于 $\omega(s)$ 的不等式以規定的不等式 $s\leqslant\omega(s)\leqslant b$。

还考察方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_{-s}^{+s}K(s, t)\varphi(t)dt, \tag{300}$$

其中 $f(s)$ 当 $-b\leqslant s\leqslant +b$ 时确定且連續，且核 $K(s, t)$ 确定在 $-b\leqslant\leqslant s\leqslant +b; -b\leqslant t\leqslant +b$。將积分区間分作兩部份 $(-s, 0)$ 及 $(0, +s)$，且在第一种情况代替积分变量 t 以 $(-t)$，得：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_0^s K(s, -t)\varphi(-t)dt+\lambda\int_0^s K(s, t)\varphi(t)dt;$$

代替 s 以 $(-s)$ 且 t 以 $(-t)$：

$$\varphi(-s)=f(-s)-\lambda\int_0^s K(-s, t)\varphi(t)dt-$$

$$-\lambda\int_0^s K(-s, -t)\varphi(-t)dt。$$

設 $0\leqslant s\leqslant b$ 及 $0\leqslant t\leqslant b$，我們令：

$$\varphi(s)=\varphi_1(s);\quad \varphi(-s)=\varphi_2(s);\quad f(s)=f_1(s);\quad f(-s)=f_2(s);$$

$$K(s,t)=K_{11}(s,t);\ K(s,-t)=K_{12}(s,t);$$
$$K(-s,t)=-K_{21}(s,t);\ K(-s,-t)=-K_{22}(s,t)。$$

我們就將积分方程(300)导向寻常形式的方程組:

$$\varphi_1(s)=f_1(s)+\lambda\int_0^s K_{11}(s,t)\varphi_1(t)dt+\lambda\int_0^s K_{12}(s,t)\varphi_2(t)dt,$$

$$\varphi_2(s)=f_2(s)+\lambda\int_0^s K_{21}(s,t)\varphi_1(t)dt+\lambda\int_0^s K_{22}(s,t)\varphi_2(t)dt。$$

若我們解这方程組，則得到兩个函数 $\varphi_1(s)$ 及 $\varphi_2(s)$，在区間 $0\leqslant s\leqslant b$ 内是連續的。現在按照以下公式我們就得着方程(300)的解 $\varphi(s)$：当 $0\leqslant s\leqslant b$ 时，$\varphi(s)=\varphi_1(s)$；当 $-b\leqslant s\leqslant 0$ 时，$\varphi(s)=$ $=\varphi_2(-s)$。当 $s=0$ 时采用这二式中任何一个，因为 $\varphi_1(0)=f_1(0)=$ $=f(0)$ 及 $\varphi_2(0)=f_2(0)=f(0)$。这里附带証明了这样得到的方程(300)的解 $\varphi(s)$ 在点 $s=0$ 也是連續的。

前面所指的逐次逼近法对于多个自变量的情况也可应用。例如在兩个自变量的情况有方程:

$$\varphi(x,y)=f(x,y)+\lambda\int_0^x\int_0^y K(x,y;s,t)\varphi(s,t)ds\,dt,$$

对于它可应用前面所説的一切。对于更一般形式的方程，即右端除二重积分外也有單积分的那种方程:

$$\varphi(x,y)=f(x,y)+\lambda\int_a^x K_1(x,y;s)\varphi(s,y)ds+$$
$$+\lambda\int_c^y K_2(x,y;s)\varphi(x,s)ds+\lambda^2\int_a^x\int_c^y K_3(x,y;s,t)\varphi(s,t)ds\,dt。$$

也可以对参数 λ 展开，且使展开式对任何 λ 値是收斂的，此处参数 λ 的引入只是为了便于逐次逼近法的进行。完全和前面一样，可以証明方程

$$\varphi(x,y)=f(x,y)+\lambda\int_{\omega_1(x)}^x\int_{\omega_2(y)}^y K(x,y;s,t)\varphi(s,t)ds\,dt$$

的解的存在性及唯一性，其中 $a\leqslant\omega_1(x)\leqslant x$ 及 $c\leqslant\omega_2(y)\leqslant y$。

我們也可以假定函数 ω_2 依賴于 x 而不依賴于 y，且函数 ω_1 依賴于 y。也不难証明方程(297)及(298)的解的唯一性。

44. 拉普拉斯变换 以后我們將專致力于在这样特殊情况的渥尔特拉方程，它的核 $K(s,t)$ 只是依賴于差 $(s-t)$。这时必須預先研究一种积分变换。它是和富里埃变换有密切联系的，即所謂拉普拉斯变換。它不仅是对于具有依賴于差的核的渥尔特拉方程的研究是必需的，而且也对于某些数学物理問題的解决是很重要的。

我們回忆，若函数 $f(x)$ 确定在区間 $-\infty<x<+\infty$ 上，服从我們曾在[II; 160]中所指的某些条件，特别地，若下面积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx \tag{301}$$

存在，則函数：

$$f_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{\alpha xi}dx \tag{302}$$

称作函数 $f(x)$ 的富里埃变换，且有下面与富里埃公式等价的反演公式：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\alpha)e^{-\alpha xi}d\alpha, \tag{303}$$

并且这后一积分应了解为在主值意义下的积分，亦即

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{+M}f_1(\alpha)e^{-\alpha xi}d\alpha.$$

設不仅积分(301)存在，而且积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta x}|f(x)|dx \tag{304}$$

在 $-m<\beta<+m$ 时也有有限值。这时函数 $f_1(\alpha)$ 不仅对于实数，且也对于滿足条件 $-m<\alpha_2<+m$ 的复数 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2 i$ 由公式(302)确定，因为：

$$|f(x)e^{\alpha x i}|=|f(x)|e^{-\alpha_2 x},$$

且按照条件这积分在 $-m<\alpha_2<+m$ 时有意义。在拉普拉斯变换中，α 經常代以純虛值 $\alpha=si$，且此外，略去因子 $(\sqrt{2\pi})^{-1}$ 是無关重要的。

我們轉到拉普拉斯变換的詳細研究，完全类似地也可引到对于富里埃变换(302)的研究。

設函数 $\varphi(x)$ 在区間 $(-\infty,+\infty)$ 内除第一种不連續点外是連續的、并且在提到的区間的任何有限部份内这样不連續点的个数是有限的。其次，設这函数在每一点有导数或有右及左导数，并且在不連續点，右导数及左导数了解为下面比式：

$$\frac{\varphi(c-h)-\varphi(c-0)}{-h} \text{ 及 } \frac{\varphi(c+h)-\varphi(c+0)}{h}$$

当 $h\to+0$ 时的極限。

此外，設积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x}\varphi(x)\,dx \tag{305}$$

絕对收斂，如果 σ 滿足不等式

$$\alpha<\sigma<\beta \tag{306}$$

的話，其中 α 及 β 是某二固定实数，它也可等于 $(-\infty)$ 或 $(+\infty)$。这时对狄义赫利积分及富里埃公式适用的寻常極限等式对函数 $e^{-\sigma x}\varphi(x)$ 也适用[参閱 **II**; **152**, **160**]。

考察由等式：

$$f(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\varphi(x)\,dx \tag{307}$$

确定的复变量 $s=\sigma+\tau i$ 的函数。在复变量 $s=\sigma+\tau i$ 平面上不等式 (306) 确定平行于虛軸的長条或半平面(若 α 或 β 之一等于無穷大)，或甚至全平面。設 B 是在長条 (306) 的内部的某一有限閉区域。我們可以在 (306) 的内部取一点 $s_0=\sigma_0+\tau_0 i$，使它在区域

B 的左面，亦即它是这样的点，对于屬于 B 的任何点 $s=\sigma+\tau i$ 有不等式 $\sigma>\sigma_0$，也取一点 $s_1=\sigma_1+\tau_1 i$ 在区域 B 的右面。于是，对于 B 中的一切点 s 及对于一切实数 x，有不等式：

$$|e^{-sx}\varphi(x)|\leqslant e^{-\sigma_0 x}|\varphi(x)|,\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时；}$$

$$|e^{-sx}\varphi(x)|\leqslant e^{-\sigma_1 x}|\varphi(x)|,\text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时。}$$

但按照条件，在写出的不等式的右端的函数沿着区間 $(0,+\infty)$ 及 $(-\infty,0)$ 是可积的。由此可見，积分(307)在区域 B 内关于 s 絕对且一致收斂，因之，函数 $f(s)$ 在区域 B 内是正則的[**III₂;70**]，因而由于 B 的选擇的任意性，函数 $f(s)$ 在長条(306)的內部是正則的。

現在証明定理，它給出用变換后的函数 $f(s)$ 来表达原来函数 $\varphi(s)$ 的式子。一般地，公式(307)是具有上面指出的性質的函数 $\varphi(x)$ 的泛函变換式，并且变換的結果得到在提过的長条内是正則的复变量函数 $f(s)$。

定理一　在所作关于 $\varphi(x)$ 的假設下有反演公式：

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{sx}f(s)\,ds, \tag{308}$$

在其中积分是沿着与虛軸平行且在長条(306)的內部的任何直綫上取的，并且积分应当認作是主值意义的。

乘积 $e^{-\sigma x}\varphi(x)$ 滿足前面指出的对于 $\varphi(x)$ 的条件，且特别地，积分(305)是絕对收斂的，因而对于函数 $e^{-\sigma x}\varphi(x)$ 可应用富里埃公式：

$$e^{-\sigma x}\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha xi}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\sigma-\alpha i)t}\varphi(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha xi}f(\sigma-\alpha i)\,d\alpha。$$

代替 α 引入新的积分变量 $s=\sigma-\alpha i$，就得到(308)。

由公式(307)表示的函数 $f(s)$ 确定在長条(306)的內部，当点 s 在所指的長条的上面或下面变到無穷远时，这函数有确定的变

化方式，这就是，利用积分的絕对收斂性，不难証明，在由不等式 $\alpha+\varepsilon<\sigma<\beta-\varepsilon$ 确定的長条 J_ε 內，当点到無穷远时，函数 $f(s)$ 趋于零，此处 ε 是已給正数。反过来，所給定的也可以不是 $\varphi(x)$ 而是在長条(306)的內部滿足某些条件的函数 $f(s)$，因而这时就由公式(308)来建立 $\varphi(x)$。我們將严格叙述关于 $f(s)$ 所作的假設。我們設 $f(s)$ 在(306)的內部是正則的。其次，設对于任何長条 J_ε，存在函数 $\omega(\rho)$，确定在 $\rho>0$，且只取正值，滿足当 $\rho\to\infty$ 时 $\omega(\rho)\to 0$ 的条件，使下积分：

$$\int_0^\infty \omega(\rho)\,d\rho$$

收斂，而且在 J_ε 內有不等式：

$$|f(s)|\leqslant\omega(|\tau|),\quad (s=\sigma+\tau i)。\tag{309}$$

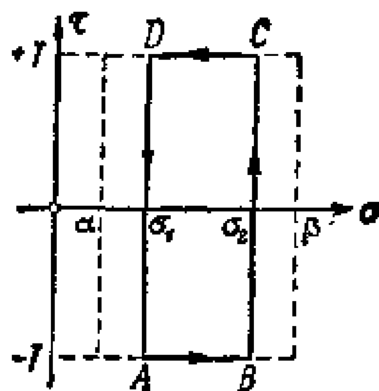
現在証明与定理一相类似的定理。

定理二 在所作的假設下，公式(308)給出的函数 $\varphi(x)$ 确定在全部实軸上，它是連續的且不依賴于 σ 的选擇。这时原来函数 $f(s)$ 按公式(307)由变換后函数 $\varphi(x)$ 确定的，并且积分应認作是主值意义的。

在(308)的右端令 $s=\sigma+\tau i$，得：

$$\varphi(x)=\frac{e^{x\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\sigma+\tau i)e^{\tau xi}d\tau。\tag{310}$$

对于任意选擇的 x 积分号下函数的模不大于有收斂积分的函数 $\omega(\rho)$，因之，公式(310)中的积分关于 x 絕对且一致收斂。这样一来，我們看出，$\varphi(x)$ 对于任何实 x 是确定的，且是連續函数 [II; 84]。



(圖一)

現在証明，这函数不依賴于 σ 的选

擇。考察在長条 (306) 的内部任意矩形 $ABCD$，这矩形是以直綫 $\sigma=\sigma_1$; $\sigma=\sigma_2$; $t=\pm T$ 作境界的（圖一）。由于柯西定理，$f(s)e^{xs}$ 沿着这矩形的境界的积分等于零。考察这积分沿平行于实軸的边 $t=\pm T$ 上的值。例如，对于边 $t=T$ 有积分：

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_1} f(\sigma+iT)e^{x(\sigma+iT)}d\sigma. \tag{311}$$

由于(309)对于这积分有估計：

$$\left|\int_{\sigma_2}^{\sigma_1} f(\sigma+iT)e^{x(\sigma+iT)}d\sigma\right| \leqslant e^{\max|x\sigma_k|}\omega(T)(\sigma_2-\sigma_1),$$

其中 $k=1$ 或 2。因此，由于当 $\rho\to\infty$ 时 $\omega(\rho)\to 0$，就可以看出当 $T\to\infty$ 时积分(311)趋于零。对于沿边 $t=-T$ 上的积分也得到类似結果。应用上面提过的柯西定理，可肯定函数 $f(s)e^{xs}$ 沿着直綫 $\sigma=\sigma_1$ 从上向下的积分与它沿着直綫 $\sigma=\sigma_2$ 从下向上的积分只有符号的差别，或者若兩直綫都取从下向上，这兩积分彼此相等的；由于直綫 $\sigma=\sigma_1$ 及 $\sigma=\sigma_2$ 的选擇的任意性，可肯定函数 $f(s)e^{xs}$ 沿着直綫 $\sigma=\sigma_0$ 的积分对于長条内部任意选擇的直綫都有相同值，亦即，对于任意选擇的 σ_0，只要它滿足不等式 $\alpha<\sigma_0<\beta$，函数 $f(s)e^{xs}$ 沿該直綫的积分就有相同的值。

还剩下要証明的是，$f(s)$ 是按公式 (307) 由 $\varphi(x)$ 来表达。在公式(308)中，令 $s=\sigma-\tau i$，有：

$$e^{-x\sigma}\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma-\tau i)e^{-\tau xi}d\tau.$$

將兩端乘以 e^{xui} 且对 x 从 $(-\infty)$ 到 $(+\infty)$ 积分。应注意的是，应用富里埃公式到函数 $f(\sigma-\tau i)$，且將这函数看作实变量 τ 的函数：

$$f(\sigma-ui)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xui}dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma-\tau i)e^{-\tau xi}d\tau,$$

我們得：

$$f(\sigma-ui)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-(\sigma-ui)x}dx,$$

由于 u 的值的任意性，因而就給出公式(307)。公式(307)及(308)是相互反演的，这里反演的意义是如同定理一及二所指出的。

我們証明，若在定理二中：$\beta=+\infty$，亦即若已知函数 $f(s)$ 在半平面 $\sigma>\alpha$ 内是正則的且在那里滿足其余的条件，則由公式(308)确定的函数 $\varphi(x)$ 当 $x<0$ 时变为零。我們看出，在这情况，特别是根据所給条件，对于任何正数 ε，在半平面 $\sigma\geqslant\alpha+\varepsilon$ 内应存在具备前面所說的性質的函数 $\omega(\rho)$。因此，我們將証明当 $x<0$ 时 $\varphi(x)=0$。应用不等式(309)来估計积分，得：

$$|\varphi(x)|\leqslant e^{x\sigma}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\omega(\rho)d\rho。$$

若 x 是固定負数，則当 $\sigma\to+\infty$ 时，右端趋于零，而左端不依賴于 σ 的选擇，因之当 $x<0$ 时确实有 $\varphi(x)=0$。在这情况，代替(307)，(308)的反演变换公式有以下形式：

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\varphi(x)dx。\tag{312}$$

反之，若假設 $\varphi(x)$ 是已知的，則变换(307)寻常称作双边拉普拉斯变换，而变换(312)称作單边拉普拉斯变换。这后一变换显然是前一变换的特别情况，且可从前面变換得到，只要已知函数 $\varphi(x)$ 在負値 x 等于零的話。在單边拉普拉斯变换的情况，我們应当对 $\varphi(x)$ 加以这样条件，它使积分(312)在某半平面 $\sigma>\alpha$ 上是絕对收斂的。若 B 是某有限閉区域，且在这半平面內，則我們可取直綫 $\sigma=\sigma_0>\alpha$，它在提过的半平面內，且在 B 的左面。按照条件，积分

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 x}|\varphi(x)|dx$$

是收斂的，且注意积分变量 $x>0$，对于屬于 B 的 s，有：

$$|e^{-sx}\varphi(x)|<e^{-\sigma_0 x}|\varphi(x)|,$$

亦即积分(312)对于屬于 B 的一切 s 是絕对且一致收斂的，且給出在 B 内为正則的亦即在半平面 $\sigma>\alpha$ 内为正則的函数 $f(s)$。

从引出的估計立卽显示出下面的断言：若积分(312)在点 $s_0=$ $=\sigma_0+\tau_0 i$ 绝对收斂，則它在半平面 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 内絕对且一致收斂。(312)的反演公式乃是公式(308)。我們指出，前面所述的一些定理在关于 $\varphi(x)$ 及 $f(s)$ 的更广泛假設下也可証明。很經常地用記号 $L_1(\varphi)$ 及 $L_2(\varphi)$ 来表示(312)及(307)的右端：

$$L_1(\varphi)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\varphi(x)dx;\quad L_2(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-sx}\varphi(x)dx\text{。}$$

变换 $L_1(\varphi)$ 及 $L_2(\varphi)$ 是可分配的，亦卽：

$$L_i(c_1\varphi)=c_1L_i(\varphi);\quad L_i(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1L_i(\varphi_1)+c_2L_i(\varphi_2),$$

其中 c_1 及 c_2 是任意常数，且 $\varphi_i(x)$ 是滿足前面所指出的条件的函数。若引入新变量 $u=e^{-x}$ 以代替变量 x，且令 $\varphi(x)=\psi(u)$，則变换(307)及(308)可写作如下形式：

$$f(s)=\int_0^{\infty}u^{s-1}\psi(u)du;\quad \psi(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}u^{-s}f(s)ds\text{。}$$

若对于富里埃变换(302)引用相应的討論，則代替 $f(s)$ 在其內部是正則的直長条，我們得到对于 $f_1(\alpha)$ $(\alpha=si)$ 在其內部为正則的横長条(平行于实軸的長条)。其余的結果除在积分号前只差一个常数因子外都保持有效。

45. 函数的卷积 設 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 是兩个連續函数，确定在 $x\geqslant 0$。由等式

$$\varphi_3(x)=\int_0^x\varphi_1(t)\varphi_2(x-t)dt \tag{313}$$

确定的 $\varphi_3(x)$ 称作这兩函数的卷积。

这函数确定在 $x\geqslant 0$ 且也是連續函数。引入新积分变量 $\tau=$ $=x-t$ 代替 t，可將 $\varphi_3(x)$ 表作形式：

$$\varphi_3(x)=\int_0^x\varphi_1(x-\tau)\varphi_2(\tau)d\tau\text{。} \tag{314}$$

通常用記号

$$\varphi_3 = \varphi_1^* \varphi_2$$

来記卷积，且从(313)及(314)立即显示出卷积与函数的次序無关，亦即 $\varphi_2^*\varphi_1 = \varphi_1^*\varphi_2$。得到卷积的运算被称作函数的卷。

設运用变換(312)到函数 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$，这变換在某半平面 $\sigma > \alpha$ 内是絕对收斂的。我們將証明，对于 $\varphi_3(x)$ 变換(312)在所指半平面內也是收斂的，且有下面的公式：

$$L_1(\varphi_1^*\varphi_2) = L_1(\varphi_1)\,L_1(\varphi_2)。\tag{315}$$

亦即对函数类 $\varphi_k(x)$ 的卷运算相当于对变換后的函数类：

$$f_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\varphi_k(x)\,dx \tag{316}$$

作簡單乘积。

为了証明它，作出公式(315)的右端的乘积：

$$\int_0^\infty e^{-su}\varphi_1(u)\,du \cdot \int_0^\infty e^{-sv}\varphi_2(v)\,dv, \tag{317}$$

并且用 u 及 v 記积分变量。我們可將写出的乘积表为絕对收斂的二重积分形式，这积分是展布在平面 (u, v) 的第一象限內：

$$\int_0^\infty e^{-su}\varphi_1(u)\,du \cdot \int_0^\infty e^{-sv}\varphi_2(v)\,dv = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}\varphi_1(u)\,\varphi_2(v)\,du\,dv。$$

乘积(317)之所以能表示为这种二重积分，是因为这乘积中的兩个积分都是絕对收斂的。为了驗証这事情，只須在这些积分中作出对有限区間 $(0, m)$ 的积分，变換这样乘积为二重积分，然后令 m 趋于無穷大且利用尋常的广义重积分的定义[**II**; **86**]。在获得的二重积分中引入新积分变量 $x = u + v$ 及 $t = v$。我們导出絕对收斂的二重积分

$$\iint_B e^{-sx}\varphi_1(x-t)\,\varphi_2(t)\,dt\;dx,$$

对于积分的区域，在旧变量由不等式 $u \geqslant 0$；$v \geqslant 0$ 确定的，而現在是由不等式 $t \geqslant 0$；$x - t \geqslant 0$ 确定的，亦即在平面 (t, x) 上积分区域

是在第一象限分角綫 $t=x$ 上面的部份。把二重积分变作二次积分,得:

$$\int_0^\infty e^{-su}\varphi_1(u)du\cdot\int_0^\infty e^{-sv}\varphi_2(v)dv=\int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^x\varphi_1(x-t)\varphi_2(t)dt\right]dx,$$

这就証明了公式(315)。

对于函数 $\varphi_3(x)$ 有估値:

$$|\varphi_3(x)|\leqslant\int_0^x|\varphi_1(x-t)||\varphi_2(t)|dt,$$

由此便可推出下面不等式:

$$\int_0^m e^{-\sigma x}|\varphi_3(x)|dx\leqslant\int_0^m dx\int_0^x e^{-\sigma x}|\varphi_1(x-t)||\varphi_2(t)|dt,$$

或,經狄义赫利变换[II; 79]后:

$$\int_0^m e^{-\sigma x}|\varphi_3(x)|dx\leqslant\int_0^m|\varphi_2(t)|dt\int_t^m e^{-\sigma x}|\varphi_1(x-t)|dx。$$

在右端引进新积分变量 $\tau=x-t$ 代替 x,得:

$$\int_0^m e^{-\sigma x}|\varphi_3(x)|dx\leqslant\int_0^m e^{-\sigma t}|\varphi_2(t)|dt\cdot\int_0^{m-t}e^{-\sigma\tau}|\varphi_1(\tau)|d\tau,$$

或者更有:

$$\int_0^m e^{-\sigma x}|\varphi_3(x)|dx\leqslant\int_0^\infty e^{-\sigma t}|\varphi_2(t)|dt\cdot\int_0^\infty e^{-\sigma\tau}|\varphi_1(\tau)|d\tau,$$

亦即从积分(317)在半平面 $\sigma>\alpha$ 内絕对收斂推出对于 $\varphi_3(x)$ 的积分也同样絕对收斂。我們注意,把展布在象限内的二重积分变为二次积分通常是容易証明的,首先考察在象限内分角綫 $t=x$ 上面的有限部份,然后取極限。公式(315)的正确性的断言通常称作卷定理。

和上面完全相类似,对于双边拉普拉斯变换也可以引出函数的卷的概念及卷定理的証明,亦即有下断言:若 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 是連續函数,确定在無穷区間 $(-\infty,+\infty)$ 内,且积分 $L_2(\varphi_1)$ 及 $L_2(\varphi_2)$ 在某長条 $\alpha<\sigma<\beta$ 内絕对收斂,則积分

(318) $$\varphi_3(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(t)\varphi_2(x-t)dt$$

对于任何实数 x 是絕对收斂的。对于获得的函数 $\varphi_3(x)$ 的拉普拉斯变换在提过的長条内是絕对收斂的，且有卷公式：

(319) $$L_2(\varphi_3)=L_2(\varphi_1)\cdot L_2(\varphi_2)。$$

46. 特殊形式的渥尔特拉方程 考察具有只依賴于其兩个变量之差的核的渥尔特拉方程：

(320) $$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt。$$

設当 $x\to+\infty$ 时，連續函数 $f(x)$ 及 $K(x)$ 趋于零，且对于充分大的值 x 有估值：

(321) $$|f(x)|\leqslant Ae^{-ax};\quad |K(x)|\leqslant Be^{-bx},$$

其中常数 A 及 $B>0$，且常数 a 及 $b\geqslant 0$。設 f_0 及 K_0 是当 $x\geqslant 0$ 时 $|f(x)|$ 及 $|K(x)|$ 的上确界。应用逐次迫近法 [43] 到方程(320)，得到当 $x\geqslant 0$ 时 $\varphi(x)$ 的估計 $|\varphi(x)|\leqslant f_0e^{K_0x}$。由此看出，当 $\sigma>\max(a,b,K_0)$ 时，可应用單边拉普拉斯变換到函数 $\varphi(x)$，$f(x)$ 及 $K(x)$，并且我們得到变換后的函数：

(322) $$\Phi(s)=L_1(\varphi);\quad F(s)=L_1(f);\quad L(s)=L_1(K),$$

它們在半平面 $\sigma>K_0$ 内是正則的。应用單边拉普拉斯变換到(320)的兩端，且利用卷公式，將有：

$$\Phi(s)=F(s)+L(s)\Phi(s),$$

从而

(323) $$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-L(s)}。$$

前面已見过，函数 $\Phi(s)$ 应在半平面 $\sigma>K_0$ 内是正則的。由于 $L(s)$ 与 $F(s)$ 完全無关，从而推知所写分式的分母在所提到的半平面内不能有零点。作公式(322)中的第一式的反演公式，得到：

(324) $$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi(s)e^{sx}ds,\quad (\sigma>K_0).$$

因此，由公式(322)确定了 $F(s)$ 及 $L(s)$ 以及由公式(323)确定了 $\Phi(s)$ 后，我們就用公式(324)得到方程(320)的显形式的解。我們注意，当函数 $\varphi(x)$ 确定在有限区間 $(0, l)$ 内，按照方程(320)，我們只利用 $f(x)$ 及 $K(x)$ 在上面指出的区間内的值，于是可用任何方式把这些函数延拓到所指区間的外面，且特别地，要它們滿足上面所指的条件。甚至可假設对充分大的正值 x 它們恒等于零。

我們証明，对于方程(320)，一切叠核也只依賴于差$(x-t)$。我們有[**43**]：

$$K_2(x, t)=\int_t^x K(x-t_1)K(t_1-t)\,dt_1\,\text{。}$$

引用新积分变量 $\tau=t_1-t$ 代替 t_1：

$$K_2(x, t)=\int_0^{x-t} K(x-t-\tau)K(\tau)\,d\tau,$$

从而立即推出 $K_2(x, t)$ 是差 $(x-t)$ 的函数，亦即 $K_2(x, t)=$ $=K_2(x-t)$。

对于其他的叠核也可类似地証明。这样一来，当 $\lambda=1$ 时，由于公式(293)我們可肯定方程(320)的解核只依賴于上面指出的差。用 $R(x-t)$ 来記它，应用公式(295)，可写方程(320)的解如形式：

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x R(x-t)f(t)\,dt\,\text{。} \tag{325}$$

应用拉普拉斯变換到这方程的兩端，且除(322)外再引入記号：

$$M(s)=L_1(R), \tag{326}$$

我們得到：$$\Phi(s)=F(s)+M(s)F(s)\,\text{。}$$

利用公式(323)，可用已知函数 $L(s)$ 来确定 $M(s)$：

$$M(s)=\frac{L(s)}{1-L(s)}, \tag{327}$$

且(326)的反演公式給出解核 $R(x)$：

$$R(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(s)e^{sx}\,ds\,\text{。} \tag{328}$$

代入公式(325),得到解。

上面指出的解方程(320)的方法也可应用到下面形式的渥尔特拉方程組:

$$\varphi_i(x)=f_i(x)+\sum_{k=1}^{p}\int_0^x K_{ik}(x-t)\varphi_k(t)dt,\quad (i=1,2,\cdots,p)。$$

应用拉普拉斯变换到兩端,得到:

$$\Phi_i(s)=F_i(s)+\sum_{k=1}^{p}L_{ik}(s)\Phi_k(s),\quad (i=1,2,\cdots,p)。$$

解出这个确定 $\Phi_i(s)$ 的綫性方程組之后,于是方程組的解由以下公式获得:

$$\varphi_i(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi_i(s)e^{sx}ds。$$

我們注意,对于核 $K(x)$ 及自由項 $f(x)$ 的条件(321)可以大大地減輕。只要存在这样正数 c,使 $f(x)e^{-cx}$ 及 $K(x)e^{-cx}$ 在 $x>0$ 时的絕对值都是有界的就够了。这时公式(324)及(328)对于充分大的值 σ 都成立。为了証明这个断言只須將(320)的兩端乘以 e^{-cx},且引入新的待求函数 $\varphi_1(x)=\varphi(x)e^{-cx}$,新的自由項 $f_1(x)=f(x)e^{-cx}$ 及新的核 $K_1(x)=K(x)e^{-cx}$。

47. 渥尔特拉第一种方程 到現在为止我們曾專致力于第二种积分方程的探討。現在我們將見到在渥尔特拉方程的情況,在某些附加条件下,第一种方程容易变換为第二种方程。考察渥尔特拉第一种方程:

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt=f(x), \tag{329}$$

且从方程本身的形式立即显示出,已知函数 $f(x)$ 应該滿足条件 $f(a)=0$。將所写的方程对 x 求导数且除以 $K(x,x)$,則导出下面的第二种方程:

$$\varphi(x)+\int_a^x\frac{K_x'(x,t)}{K(x,x)}\varphi(t)dt=\frac{f'(x)}{K(x,x)}, \tag{330}$$

并且認为 $f'(x)$ 是連續的且 $K(x,x)\neq 0$。一般情况的討論可在 Г. 穆尤茨蒋的"积分方程"書中找到。

注意到条件 $f(a)=0$,我們容易从方程(330)回到方程(329),亦即这兩个方程是等价的,因之,方程(329)有唯一解。現在考察具有如下形式的核:

$$K(x,t)=\frac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad (0<\alpha<1)$$

的第一种方程,其中 $H(x,t)$ 是連續函数,且有对于 x 的連續导数。这类型的方程屬于前面討論过的亞貝尔方程。这样,我們来考察积分方程

$$\int_0^x \frac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{331}$$

并且也和亞貝尔方程一样,我們取积分的下限等于零。將这方程的兩端乘以 $(z-x)^{-\alpha}$ 且从 $x=0$ 到 $x=z$ 对 x 积分,且应用狄义赫利公式[**II**; **79**],导出下面的积分方程:

$$\int_0^z \varphi(t)\,dt\int_t^z \frac{H(x,t)}{(z-x)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\,dx=\int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{\alpha}}\,dx, \tag{332}$$

它的核由下列公式确定:

$$K_1(z,t)=\int_t^z \frac{H(x,t)}{(z-x)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\,dx_{\circ}$$

这个核業已不是奇性的,这不难利用积分变量的变换来証实,就是說,按下公式引进新积分变量 θ 代替 x:

$$x=\frac{z+t}{2}+\frac{z-t}{2}\cos\theta,$$

我們得:

$$K_1(z,t)=\int_0^{\pi}\frac{H\left(\frac{z+t}{2}+\frac{z-t}{2}\cos\theta,\ t\right)\sin\theta}{(1+\cos\theta)^{1-\alpha}(1-\cos\theta)^{\alpha}}\,d\theta, \tag{333}$$

从而,注意到核 $H(x,t)$ 的連續性以及所写出的积分对 z 及 t 的一

致收斂性，我們可以断定核 $K_1(z, t)$ 是連續核。利用函数 $\Gamma(z)$ 的理論中的公式[**III₂; 71, 72**]，我們可以写出：

$$\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{\alpha-1}(1-\cos\theta)^{-\alpha}\sin\theta\, d\theta=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha},$$

因之公式(333)給出：

$$K_1(z, z)=H(z, z)\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}。$$

这样一来，新連續核 $K_1(z, t)$ 將滿足条件 $K_1(z, z)\neq 0$，只要函数 $H(x, t)$ 也滿足类似的条件，即 $H(x, x)\neq 0$。若存在連續导数 $H_x(x, t)$，則从公式(333)也立即得着 $K_1(z, t)$ 对于 z 有連續导数。同样，当存在連續导数 $f'(x)$，从公式

$$f_1(z)=\int_0^z\frac{f(x)}{(z-x)^{\alpha}}\,dx=\int_0^z\frac{(z-x)^{1-\alpha}f'(x)}{1-\alpha}\,dx$$

立即显示出方程(332)的右端有連續导数：

$$f_1'(z)=\int_0^z\frac{f'(x)}{(z-x)^{\alpha}}\,dx。$$

因此，在所作的假設下，方程(332)有解 $\varphi(x)$。剩下要証明的是，这个函数也适合原来方程(331)。將 $\varphi(x)$ 代入原来方程且作差

$$\omega(x)=f(x)-\int_0^x\frac{H(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt。$$

將兩端乘以 $(z-x)^{-\alpha}$，在限 $0\leqslant x\leqslant z$ 內对 x 积分且应用狄义赫利公式[**II; 79**]，由于(332)，得：

$$\int_0^z\frac{\omega(x)}{(z-x)^{\alpha}}\,dx=0。$$

將兩端乘以 $(u-z)^{\alpha-1}$，从 $z=0$ 到 $z=u$ 对 z 积分且交换积分的次序，则对于任何 u，有：

$$\int_0^u\omega(x)\,dx=0,$$

从而立即显出 $\omega(x)\equiv 0$。

現在設在方程 (329) 中的函数 $K(x,t)$ 只依賴于差 $(x-t)$，亦即考察第一种积分方程：

$$\int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt=f(x)。\tag{334}$$

將兩端乘以 e^{-sx} 且从 $x=0$ 到 $x=\infty$ 对 x 积分。引入对于已知函数 $f(x)$ 及 $K(x)$ 以及待求函数 $\varphi(x)$ 的單边拉普拉斯变换：

$$\Phi(s)=L_1(\varphi);\quad F(s)=L_1(f);\quad L(s)=L_1(K),\tag{335}$$

由于卷定理，得：

$$L(s)\Phi(s)=F(s)。\tag{336}$$

我們假設核 $K(x,t)$ 滿足条件 $K(x,x)\neq 0$，这是我們在以前提过的，而在这情况，它有形式 $K(0)\neq 0$。这就保証了方程(334)的解的存在。其次，也和以前一样，我們假定当正值 x 充分大时 $f(x)$ 及 $K(x)$ 都变为零。如果注意到 $f(x)$ 的任意性，如同在 [**46**] 中一样，我們就可断言当值 s 有充分大的实部时 $L(s)$ 不为零。公式(336)給出 $\Phi(s)$，且应用反演公式到 (335) 中的第一式，我們得到方程(334)的有限形式的解：

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}\Phi(s)ds。\tag{337}$$

若 $H(x,t)$ 只依賴于差 $(x-t)$，則上述方法也可应用到方程 (331)，并且只要 $0<\alpha<1$，我們就不难驗証应用拉普拉斯变换及卷定理的合法性。

48. 例 1. 考察方程

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt。\tag{338}$$

在这情况 $K(x)=x$，而

$$L(s)=\int_0^\infty e^{-sx}x\,dx=\frac{1}{s^2},$$

并且認为 s 的实部是正的。公式 (327) 給出

$$M(s)=\frac{1}{s^2-1},$$

且由于(328)，解核由等式：

(339) $$R(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{sx}}{s^2-1}\,ds,\quad (x>0)$$

确定，其中 σ 是任何充分大的实数。

考察沿着在平面 $s=\sigma+\tau i$ 上的閉圍道的积分，这圍道是由直綫 $\sigma=\sigma_0$ 上的綫段（此处 $\sigma_0>1$）及以这直綫与实軸的交点为心且位于这直綫的左边的半圓周作成的。在积分(339)中由公式 $s-\sigma_0=is_1$ 引入新积分变量 s_1 代替 s，我們得到在变量 s_1 的平面上积分圍道，它是由实軸上的綫段及以原点作心的半圓周作成的。利用約当引理[III$_2$; 60]及 $x>0$，可确信沿着半圓周的积分当它的半徑趋于無穷大时趋于零，且从而立即推得当 $x>1$ 时积分(339)的值等于积分号下函数在点 $s=\pm 1$ 的留数之和，亦即

$$R(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),$$

因而由于(325)，方程(338)的解可写作形式：

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{1}{2}e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt\,.$$

2. 对于方程

(340) $$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt,$$

我們有 $K(x)=e^x$，因之：

$$L(s)=\int_0^\infty e^{(1-s)x}dx=\frac{1}{s-1},$$

从而 $$M(s)=\frac{1}{s-2}\text{ 且 }R(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{sx}}{s-2}\,ds.$$

同上面例子一样，应用留数定理，得

$$R(x)=e^{2x},$$

因而方程(340)的解是：

$$\varphi(x)=f(x)+e^{2x}\int_0^x e^{-2t}f(t)\,dt\,.$$

3. 我們已有含着貝塞尔函数 $J_0(x)$ 的下面公式[III$_2$; 153]：

$$\int_0^\infty e^{-kz}J_0(k\rho)\,dk=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}},$$

从而有

$$\int_0^\infty e^{-sx} J_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}。 \tag{341}$$

如果注意[**III₂**; **113**]中貝塞尔函数的近似估値，我們就可以肯定：若 s 的实部是正的，公式(341)是正确的。

我們考察积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\,dt。 \tag{342}$$

在这情況，$K(x)=\lambda J_0(x)$，由于(341)：

$$L(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+s^2}} \text{ 及 } M(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+s^2}-\lambda},$$

因此解核由下式：

$$R(x) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{\sqrt{1+s^2}-\lambda}\,ds$$

确定，或

$$R(x) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sqrt{1+s^2}-s}{1-\lambda^2+s^2} e^{sx}ds + \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{s+\lambda}{1-\lambda^2+s^2} e^{sx}ds。$$

第二个积分和上面一样可用留数定理来計算。我們致力于第一积分的变換。除公式(341)而外，完全一样的对于正整数 n 可証明以下公式：

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(x)\,dx = \frac{(\sqrt{1+a^2}-a)^n}{\sqrt{1+a^2}},$$

且將这等式从 $a=s$ 到 $a=+\infty$ 对 a 积分，得：

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{J_n(x)}{x}\,dx = \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^n}{n}。$$

另一方面，应用留数定理，得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{1-\lambda^2+s^2} e^{sx}ds = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin(\sqrt{1-\lambda^2}\,x)。$$

于是，我們可写：

$$L_1\left(\frac{J_1(x)}{x}\right) = \sqrt{1+s^2}-s; \quad L_1\left(\frac{\sin\sqrt{1-\lambda^2}\,x}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) = \frac{1}{1-\lambda^2+s^2}。$$

应用卷定理，得：

$$L_1\left(\frac{\sin\sqrt{1-\lambda^2}\,x}{\sqrt{1-\lambda^2}} * \frac{J_1(x)}{x}\right) = \frac{\sqrt{1+s^2}-s}{1-\lambda^2+s^2},$$

因之，对于在表达式 $R(x)$ 中引入的积分，得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\sqrt{1+s^2}-s}{1-\lambda^2+s^2}\, e^{sx}ds=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int_0^x \sin\left[\sqrt{1-\lambda^2}\,(x-t)\right]\cdot\frac{J_1(t)}{t}\,dt,$$

因而方程(342)的解核有表达式：

$$R(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int_0^x \sin\left[\sqrt{1-\lambda^2}\,(x-t)\right]\cdot\frac{J_1(t)}{t}\,dt+$$

$$+\lambda\cos(\sqrt{1-\lambda^2}\,x)+\frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin(\sqrt{1-\lambda^2}\,x)。$$

4. 考察第一种方程：

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x。\tag{343}$$

在兩端实行單边拉普拉斯变换，得：

$$\frac{\Phi(s)}{s-1}=\frac{1}{s^2}，亦即\ \Phi(s)=\frac{s-1}{s^2},$$

于是
$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{s-1}{s^2}\,e^{sx}ds=1-x。$$

5. 考察方程：

$$\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\,dt=\sin x。\tag{344}$$

注意到下关系

$$L_1[J_0(x)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\ 及\ L_1(\sin x)=\frac{1}{s^2+1},\tag{345}$$

我們得：
$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\Phi(s)=\frac{1}{s^2+1}，亦即\ \Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}},$$

因之：
$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{sx}}{\sqrt{s^2+1}}\,ds,$$

或者注意(345)的第一式：

$$\varphi(x)=J_0(x),$$

也就是，將这个解代入方程(344)之后，我們得到公式：

$$\int_0^x J_0(x-t)J_0(t)\,dt=\sin x。$$

6. 还考察这样的核，当 $t=x$ 它变为無穷大：

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x\frac{1}{(x-t)^\alpha}\,\varphi(t)\,dt,\quad(0<\alpha<1),$$

且作出与这个核对应的解核，而我們在論証中并不認为上述方法对这个奇性

情况是适用的。

計算 $L(s)$ 及 $M(s)$：

$$L(s)=\lambda\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{x^\alpha}\,dx=\lambda\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1},$$

$$M(s)=\frac{\lambda\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}}{1-\lambda\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}},$$

因而得到解核的表达式：

$$R(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{sx}\frac{\lambda\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}}{1-\lambda\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}}\,ds,\quad (x>0),$$

其中 σ 是充分大正数。

展为級数，得：

$$\frac{\lambda\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}}{1-\lambda\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha-1}}=\sum_{n=1}^\infty\lambda^n[\Gamma(1-\alpha)]^n s^{n(\alpha-1)},$$

因之一切归結到計算下积分：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{sx}s^{n(\alpha-1)}ds。$$

作代換 $sx=\tau$，將圍道作适当的改变并利用在[III₂; 74]中的公式(154)，得到：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{sx}s^{n(\alpha-1)}ds=\frac{x^{n(1-\alpha)-1}}{\Gamma[n(1-\alpha)]},$$

从而

$$R(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{[\lambda\Gamma(1-\alpha)x^{1-\alpha}]^n}{x\Gamma[n(1-\alpha)]}。$$

49. 荷重的积分方程　当叙述具有連續核的积分方程的理論时是从寻常积分概念出發的。如果从其他积分概念出發，可以重复一切理論或它的一部份。我們在前面已經提到过在勒貝格积分的基础上来建立积分方程理論的可能性。建立理論的本質就是要使在建立理論时所考察的积分具有一切那些性質，而这些性質正是在建立理論时所需要用到的。在这一段中，我們將指出积分的新概念，在这概念的基础上，可建立在这一章开始时积分方程理論的一切叙述。下面結果的引出归功于克納塞尔[①]。

① 克納塞尔(Kneser)，Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo. 38，1914，及同一作者，Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathem. Physik，1922，第 117 頁。

我們只討論最簡單情况。設$f(x)$是在有限区間$[a, b]$內的連續函数，x_p $(p=1, 2, \cdots, m)$是在这区間內的固定点且a_p是某些正数。$f(x)$对于区間$[a, b]$的积分定义为寻常积分及函数$f(x)$在点$x=x_p$的值乘以a_p的乘积之和。为了与寻常积分有所区别，將在积分号上面加一横綫。上述的定义給出下面表达式：

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\sum_{p=1}^{m} a_p f(x_p). \tag{346}$$

显然立即有下面的寻常积分的性質：

$$\overline{\int_a^b}[f_1(x)+f_2(x)]dx=\overline{\int_a^b} f_1(x)dx+\overline{\int_a^b} f_2(x)dx;$$

$$\overline{\int_a^b} cf(x)dx=c\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

其次，当相繼的对于区間$[a,b]$取积分，可変換次序，亦即

$$\overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_a^b} F(s, t)dt\right]ds=\overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_a^b} F(s, t)ds\right]dt.$$

事实上，直接应用定义(346)，驗証出那个事实，就是所写出的等式的兩端都有表达式：

$$\int_a^b\int_a^b F(s, t)ds\,dt+\sum_{p=1}^{m}\int_a^b[F(s, x_p)+F(x_p, s)]ds+$$

$$+\sum_{p,q=1}^{m} F(x_p, x_q).$$

到現在为止我們沒有利用系数a_p的正性。在下面的性質中这对于我們是很重要的。若$f(x)\geqslant 0$，則(346)中的积分同样也有非負值，且它只在$f(x)\equiv 0$的情况才等于零。对于重积分也有完全相同性質。由此，如寻常一样，对于新概念的积分显示出布里亞柯夫斯基不等式的正确性。若$|f(x)|\leqslant m$，則存在这样正数k，使有不等式：

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx\right|\leqslant km.$$

当 $a_p>0$ 时，显然可假設 $k=(b-a)+a_1+\cdots+a_p$。

从最后性質，和寻常一样[I; 145]，能推出一致收斂級数可按新的积分概念来逐項积分。利用这个积分概念，可逐字逐句地重复具有連續核的积分方程的一切理論。若 $K(t, s)=K(s, t)$，則显然有

$$\overline{\int_a^b} K(s, t)\varphi(t)dt=\overline{\int_a^b} K(t, s)\varphi(t)dt.$$

积分方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\overline{\int_a^b} K(s, t)\varphi(t)dt \tag{347}$$

显然与下面的有寻常积分的方程：

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt+\lambda\sum_{p=1}^m a_pK(s,x_p)\varphi(x_p) \tag{348}$$

等价。

照例，特征値及特征函数將从齐次方程：

$$\varphi(s)=\lambda\overline{\int_a^b} K(s, t)\varphi(t)dt$$

来确定。

在对称核的情况，特征函数可以認为是正交的：

$$\overline{\int_a^b}\varphi_1(s)\varphi_2(s)ds=0$$

或

$$\int_a^b\varphi_1(s)\varphi_2(s)ds+\sum_{p=1}^m a_p\varphi_1(x_p)\varphi_2(x_p)=0.$$

最后剩下的是希尔伯特——施密特及麦色定理的正确性。形如(347)的方程叫做荷重的积分方程。

考察一个例子。取对称核 $K(s, t)$，当 $s\leqslant t$ 时它等于 s，而当 $s\geqslant t$ 时它等于 t，基本区間是 $[0, 1]$。設在公式(346)中 $m=1$，且在右端取在 $x=1$ 时的唯一附加項，亦卽：

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+af(1),\quad (a>0).$$

齐次方程：
$$\varphi(s)=\lambda\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,dt$$
可写作形式：

(349) $$\varphi(s)=\lambda\int_0^s t\varphi(t)\,dt+\lambda s\int_s^1\varphi(t)\,dt+\lambda sa\varphi(1).$$

对 s 求导数，得：

(350) $$\varphi'(s)=\lambda\int_s^1\varphi(t)\,dt+\lambda a\varphi(1)$$

且再求一次导数，导出方程：

(351) $$\varphi''(s)+\lambda\varphi(s)=0。$$

从 (349) 及 (350) 推出下面两个边界条件：$\varphi(0)=0$ 及 $\varphi'(1)=\lambda a\varphi(1)$。反之，容易看出，方程 (351) 满足指出条件的解是积分方程 (349) 的解。若 $a=0$，则有尋常积分方程，且边界条件 $\varphi(0)=\varphi'(1)=0$ 不含有参数 λ。令 $\lambda=\mu^2$，由于第一个边界条件，有：$\varphi(s)=C\sin\mu s$，而第二条件給出确定 μ 的方程，也就是：$\cos\mu=a\mu\sin\mu$。

李希登施丹① 曾討論过更一般型的方程。設 B 是平面上的某区域且 l 是它的境界。李希登施丹考察的方程的形式是：

(352) $$\varphi(M)+\lambda\iint_B K_1(M,N)\varphi(N)\,d\sigma_N+\lambda\int_l K_2(M,N)\varphi(N)\,ds_N+$$
$$+\lambda\sum_{k=1}^m K_3(M,P_k)\varphi(P_k)=f(M),$$

其中 P_k 是屬于閉区域 B 的固定点。若引用新核及新微分，則这方程可写作尋常的形式：設 M 屬于閉区域 B 且 N 不同于点 P_k。設：

$$K(M,N)=\begin{cases}K_1(M,N),\text{若}N\text{在}B\text{的内部;}\\K_2(M,N),\text{若}N\text{在}l\text{上,}\end{cases}\qquad d\omega_N=\begin{cases}d\sigma_N\ \text{在}B\text{内;}\\ds_N\ \text{在}l\text{上,}\end{cases}$$

且設：若 N 与 P_k 重合，
$$K(M,N)=K_3(M,P_k)\text{ 及 }d\omega_N=1。$$
这时方程(352)可写作形式
$$\varphi(M)+\lambda\int_{B+l}K(M,N)\varphi(N)\,d\omega_N=f(M),$$

① Studia Mathematica, t. III, 1931。

因之可重复弗列德和蒙的一切理論。我們仅指出，当 $f(M)$ 为連續时，这时轉置方程：

$$\psi(M)+\lambda\int_{B+l}K(N,M)\psi(N)d\omega_N=f(M)$$

的解当过渡到境界 l 上及在点 P_k 处一般地說是不連續的。关于齐次轉置方程的解也能有同样的說法。

上面的結果在三維空間也是正确的。荷重的积分方程的研究的另一方法曾在 H.M.根特尔的論文中給出①。

50. 富里埃积分方程 若在积分方程中的积分区域(在一維情况是积分区間)是無限的或核变为無界的而不是像我們在[17]中討論过的那种类型的核，則前面所証过的一些基本定理可能不成立。建立也包括某些这样奇性积分方程情况在內的更一般的积分方程理論，需要超出連續函数类的范圍以外，并要利用更广泛的积分概念。这將在卷五中来做。此处我們只簡略地指出事实方面的材料而不严格叙述最后定理，这些定理將在卷五中叙述。

我們从对于偶函数的富里埃变換的情况开始，然后主要地將討論依賴于差的核。

回忆以前曾証明的富里埃公式 [**II**; **160**]。若 $f(s)$ 是連續的，且在区間 $0\leqslant s<\infty$ 內絕对可积，且在这区間的任何有限部份內只有 $f(s)$ 的有限个上升或下降(單調)区間，如果作出函数

$$f_1(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos st\,dt,$$

則可由公式：

$$f(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_1(t)\cos st\,dt$$

用 $f_1(s)$ 来表示 $f(s)$。把上面二公式相加，得：

$$f(s)+f_1(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty[f(t)+f_1(t)]\cos st\,dt,$$

亦卽对于任意选擇滿足上面條件的函数 $f(s)$，函数 $\varphi(s)=f(s)+f_1(s)$ 是积分方程：

$$\varphi(s)=\lambda\int_0^\infty\varphi(t)\cos st\,dt \tag{353}$$

① Studia Mathematica, t. IV, 1932。

的特征函数，对应于特征值 $\lambda=\sqrt{2}:\sqrt{\pi}$。

利用 $f(s)$ 的任意性，可以証明，对于指出的 λ，齐次方程(353)有無穷多个綫性無关的特征函数。写出的积分方程具有这样的特性是因为积分区間 $[0,\infty]$ 是無限的。

我們験証上面的断言。不难証明，若令 $f(s)=e^{-ps}\ (p>0)$，則有 $f_1(s)=\sqrt{2}\,p\,\sqrt{\pi}\,(s^2+p^2)$。在这情况，当 λ 取指定的值，我們得到方程(353)的解，这解含有任意参数 p，它可取任何正值。完全类似的可以討論在区間 $[0,\infty]$ 上具有核 $\sin st$ 的积分方程。

51．無穷大区間的情况的方程　利用双边拉普拉斯变换或富里埃变换，我們可应用在[48]中所指的方法到弗列德和蒙形式的方程：

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)\varphi(t)\,dt\text{。}\tag{354}$$

这时前面的一切公式仍然是正确的，仅須将各处的單边拉普拉斯变换改为双边的，除此以外，必須檢驗我們所用这个变换的合法性。除了加到已知函数 $f(x)$ 及 $K(x)$ 的一些条件以外，还必須指出在怎样的函数类中可求得方程(354)的解 $\varphi(x)$。

將設 $f(x)$ 及 $K(x)$ 都是連續函数，且存在下积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x)|\,dx=A\text{。}\tag{355}$$

我們証明，若常数 A 滿足条件 $A<1$，則方程(354)只有一个有界解。若有两个有界解，則齐次方程

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)\psi(t)\,dt\tag{356}$$

应該有异于零的有界解。我們把它引出矛盾来。設 δ 是 $|\psi(x)|$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 的上确界。对于已給任意小正数 ε 存在这样的值 x，使 $|\psi(x)|>\delta-\varepsilon$。將这 x 值代入(356)，得：

$$\delta-\varepsilon<\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x-t)|\,|\psi(t)|\,dt\leqslant\delta\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x)|\,dx=\delta A,$$

亦即 $\delta-\varepsilon<\delta A$，而这是与 $A<1$ 及 ε 可取为任意小相矛盾的。若 $f(x)$ 是有界函数，亦即 $|f(x)|\leqslant M$，則利用尋常逐次迫近法，可以証明在 $A<1$ 的条件下存在有界解。若在方程中引用参数

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)\varphi(t)\,dt,$$

則前面指出的条件($A<1$)写作形式

(357) $$|\lambda|<A^{-1}。$$

除了有界解，自然可能存在在区間 $-\infty<x<+\infty$ 上是無界的連續解 $\varphi(x)$。有时以 $|\varphi(x)|$ 或 $|\varphi(x)|^2$ 在無穷区間 $-\infty<x<+\infty$ 上的积分存在的条件来代替解的有界性的条件。应用勒貝格积分在这意义下解的存在性及唯一性的条件，例如在鉄其馬盛(Titchmarsh)著"富里埃积分理論导引"一書中(国立技术理論書籍出版局，1948，第 389 頁)已經指出了。

現在考察齐次方程

(358) $$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)\varphi(t)dt$$

且將探求它的形如：

(359) $$\varphi(x)=e^{ax}$$

的解，其中 a 是某常数。代入(358)：

$$e^{ax}=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)e^{at}dt。$$

引用新积分变量：$t_1=x-t$ 来代替 t。約去 e^{ax} 且以 t 代替 t_1，我們得到确定 a 的方程：

(360) $$\int_{-\infty}^{+\infty}K(t)e^{-at}dt=1。$$

若这方程有某 r 次根，則將这方程对 a 微分，得：

(361) $$\int_{-\infty}^{+\infty}K(t)e^{-at}t^kdt=0,\quad (k=1,2,\cdots,r-1)。$$

从(360)及(361)显示出在利用上面的变量代換后，不仅函数(359)是方程(358)的解，且函数

(362) $$e^{ax},\ xe^{ax},\ \cdots,\ x^{r-1}e^{ax}$$

也是它的解。这时自然假定 a 是这样的数，它使方程(358)的右端中的积分有意义。可以說，这些函数完全包括了方程(358)屬于确定函数类的一切解。在提到过的鉄其馬盛書中[第 390 頁]叙述了和这相当的結果。

我們注意，当且仅当 a 是純虛数时解 e^{ax} 在区間 $-\infty<x<+\infty$ 上是有界的。

52. 例　为了闡明前面的叙述，我們引出几个例子。

1. 設在方程(354)中，令

(363) $$f(x)=e^{-|x|};\quad K(x)=\begin{cases}\lambda e^{x}, & 当\ x\leqslant 0;\\ 0, & 当\ x>0,\end{cases}$$

亦即方程可写作如下形式：

(364) $$\varphi(x)=e^{-|x|}+\lambda e^{x}\int_{x}^{\infty}e^{-t}\varphi(t)dt.$$

对于函数(363)实行双边拉普拉斯变换：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-sx}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-s)x}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-(1+s)x}dx=$$

$$=\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}=\frac{2}{1-s^2}。$$

$$L(s)=\lambda\int_{-\infty}^{0}e^{(1-s)x}dx=\frac{\lambda}{1-s}。$$

在确定 $F(s)$ 时我們設复变量 $s=\sigma+\tau i$ 屬于長条 $-1<\sigma<+1$，且在确定 $L(s)$ 时必須有不等式 $\sigma<1$。按照公式(323)：

$$\Phi(s)=\frac{2}{(1+s)(1-\lambda-s)},$$

因之，

(365) $$\varphi(x)=\frac{2}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{sx}}{(1+s)(1-\lambda-s)}ds。$$

如果取直綫 $\sigma=0$，亦即純虛軸，为积分路綫，則从公式(310)或直接估計上面这个积分就可推出我們得到的解是有界的。这时我們認为点 $(1-\lambda)$ 不落在虛軸上。設这点落在純虛軸的右边，亦即 $(1-\lambda)$ 的实部是正的。当 $x>0$ 时，也和[48]中一样，应用留数定理，并且極点 $s=-1$ 是落在积分直綫的左边：

(366_1) $$\varphi(x)=\frac{2}{2-\lambda}e^{-x},\qquad (x>0)。$$

当 $x<0$ 时，为了要导向約当引理，我們不应取积分直綫左边的半圓周，而应取它右边的半圓周[参閱 III_2; 61]。确定在点 $s=1-\lambda$ 的留数，得：

(366_2) $$\varphi(x)=\frac{2}{2-\lambda}e^{(1-\lambda)x},\quad (x<0)。$$

若点 $(1-\lambda)$ 落在純虛軸的左边，則两个極点都落在純虛軸的左边，因而得到有界解：

(367) $$\varphi(x)=\frac{2}{2-\lambda}\left(e^{-x}-e^{(1-\lambda)x}\right),\quad (x>0);$$

$$\varphi(x)=0,\qquad (x<0)。$$

这时我們設 $\lambda\neq 2$。当 $\lambda=2$ 时，(365) 中的被积分函数有二級極点 $s=-1$，因而我們得到：

$$\varphi(x)=\begin{cases}-2xe^{-x}, & (x>0);\\ 0, & (x<0)。\end{cases} \tag{368}$$

回到方程 (364)，設：

$$\psi(x)=\int_x^\infty e^{-t}\varphi(t)dt,$$

从而

$$\psi'(x)=-e^{-x}\varphi(x)。 \tag{369}$$

当 $x>0$ 时，方程 (364) 記作如下形式：

$$-\psi'(x)=e^{-2x}+\lambda\psi(x),$$

因之，若 $\lambda\neq 2$：

$$\psi(x)=\frac{e^{-2x}}{2-\lambda}+C_1e^{-\lambda x}, \quad (x>0)。$$

恰好一样的当 $x<0$ 时，得：

$$\psi(x)=-\frac{1}{\lambda}+C_2e^{-\lambda x}, \quad (x<0)。$$

从 $\psi(x)$ 在 $x=0$ 点的連續性得到：

$$C_2=C_1+\frac{1}{2-\lambda}+\frac{1}{\lambda},$$

如果注意 (369) 且令 $C=C_1\lambda$，则最后得到：

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{2}{2-\lambda}e^{-x}+Ce^{(1-\lambda)x}, \quad (x>0);\\ \varphi(x)&=\left(\frac{2}{2-\lambda}+C\right)e^{(1-\lambda)x}, \quad (x<0),\end{aligned} \tag{370}$$

其中 C 是任意常数。$\lambda=2$ 的情况需要單独討論，我們不停留在这方面。在 $C=0$ 时得到解 (366_1) 及 (366_2)，而在 $C=2:(2-\lambda)$ 时得到解 (367)。若 λ 的实部是負数或零，则应在公式 (370) 中令 $C=0$，因为在相反情况，方程 (364) 中出現的积分失去意义。若 $(1-\lambda)$ 是純虛数或零，則解 (370) 对于任何 C 是有界解。在这情况：

$$A=\int_{-\infty}^0 e^t dt=1,$$

且条件 (357) 有形式 $|\lambda|<1$。我們看出，当 $\lambda=1$ 时業已有無穷多的有界解。

在公式(370)中存在任意常数，这表明只要 λ 的实部是正的話，函数

(371) $$\omega(x)=e^{(1-\lambda)x}$$

应当是齐次方程：

(372) $$\omega(x)=\lambda\int_{x}^{\infty}e^{x-t}\omega(t)\,dt$$

的解。在这情况方程(360)有形式：

$$\lambda\int_{-\infty}^{0}e^{(1-a)t}dt=1;\ 亦即\ \frac{\lambda}{1-a}=1\ 或\ a=1-\lambda,$$

从而也得着方程(372)的解(371)。这样一来，我們看出，有正的实部的任何值 λ 都是方程(372)的特征值。对应的特征函数(371)在区間$(-\infty,+\infty)$内將不是有界的，除非 $(1-\lambda)$ 是純虛数或零的情况。如同在富里埃积分方程[50]时一样，积分方程一般理論中所証明的定理之所以不成立是由于这里的积分区間是無限的。

2. 考察方程

(373) $$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt。$$

在这情况核是对称的。应用双边拉普拉斯变換到函数 $\lambda K(x)=\lambda e^{-|x|}$ (参考上例)：

$$L(s)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-sx}e^{-|x|}dx=\frac{2\lambda}{1-s^2},\quad(-1<\sigma<+1)。$$

現在按照公式(327)作出 $M(s)$：

$$M(s)=\frac{2\lambda}{1-2\lambda-s^2},$$

并按照公式(328)構造解核，

(374) $$R(x)=\frac{2\lambda}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{e^{sx}}{1-2\lambda-s^2}\,ds。$$

在这情况 $$A=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}dx=2,$$

且条件(357)將是：

(375) $$|\lambda|<\frac{1}{2}。$$

我們將設这条件已实現，这时差 $(1-2\lambda)$ 的实部一定大于零，且用 $\sqrt{1-2\lambda}$ 記这根式的这样值，它的实部是正的，从公式(374)，得：

(376)
$$R(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}e^{-|x|\sqrt{1-2\lambda}}。$$

和上面的例子一样，由留数定理从(374)得出公式(376)，并且需要分别地考察 $x<0$ 及 $x>0$ 的情况。它也可以按另一个方式得出。只須在公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-sx}e^{-|x|}dx=\frac{2}{1-s^2}$$

中，令 $x=\sqrt{1-2\lambda}\,y$ 及 $s=\sigma:\sqrt{1-2\lambda}$，給出：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma y}e^{-|y|\sqrt{1-2\lambda}}\,dy=\frac{2\sqrt{1-2\lambda}}{1-2\lambda-\sigma^2}。$$

这个双边拉普拉斯变换的反演公式也立即导出积分(374)的表达式(376)。有了解核(376)，則仿照着公式(325)，有：

(377)
$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|\sqrt{1-2\lambda}}f(t)\,dt。$$

若 $f(x)$ 在区間 $(-\infty,+\infty)$ 內是有界函数，則这公式显然給出方程(373)的有界解。不仅在条件(375)下是这样，且对于任何 λ 也都是这样，但是除了当 $(1-2\lambda)$ 是零或負实数的情形而外，亦即除了 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 而外。

在这情况，方程(360)有形式：

$$\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}e^{-at}dt=1,$$

亦即
$$\frac{2\lambda}{1-a^2}=1\text{ 或 }a=\pm\sqrt{1-2\lambda},$$

因此齐次方程

(378)
$$\omega(x)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|}\omega(t)\,dt$$

有解：

(379)
$$\omega(x)=C_1e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x}+C_2e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}。$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，方程关于 a 有重根 $a=0$，且代替(379)，有：

$$\omega(x)=C_1+C_2x。$$

当在(378)的右端代入表达式(379)时，为了要积分有意义，必須要求 $\sqrt{1-2\lambda}$ 的正实部小于一或要求这实部等于零。若 $1-2\lambda<0$，亦即 $\lambda>\frac{1}{2}$，則公式(379)給出方程(378)的有界解。当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时方程(378)的正交解將是任意常数。在这情况一切实值 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 將是方程(378)的特征值，它們与有界

特征函数对应。按照(379)，当$\lambda>\frac{1}{2}$时，特征函数可写作形式：$\sin\sqrt{2\lambda-1}\,x$及$\cos\sqrt{2\lambda-1}\,x$。若$\sqrt{1-2\lambda}$的实部是正的且小于一，则对于任何选擇的任意常数C_1及C_2，公式(379)給出方程(378)的無界解。

3．齐次方程

(380)
$$\psi(x)=\lambda\int_0^{\infty}\frac{\psi(t)}{x+t}\,dt$$

借助于代換

(381)
$$x=e^{\xi},\quad t=e^{\tau};\quad e^{1/2\xi}\psi(e^{\xi})=\varphi(\xi)$$

导向下列形式：

(382)
$$\varphi(\xi)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}(\xi-\tau)}\,d\tau\text{。}$$

对应于它的方程(360)有形式：

(383)
$$\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-at}}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}t}\,dt=1,$$

并且为了积分存在，必須設a的实部落在区間$\left(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)$的內部。为了計算上面的积分，引入新积分变量$x=e^t$：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-at}}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-at}}{e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t}}\,dt=\int_0^{\infty}\frac{x^{-(a+\frac{1}{2})}}{1+x}\,dx\text{。}$$

設$-\left(a+\frac{1}{2}\right)=b-1$，亦卽$b=\frac{1}{2}-a$，且利用已知积分[$\mathbf{III_2}$; **62**]：

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin b\pi}=\frac{\pi}{\cos a\pi},$$

方程(383)可写作如下形式：

$$\frac{\pi\lambda}{\cos a\pi}=1,$$

并且我們应这样选擇这方程的根，这些根的实部落在区間$\left(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)$之內。若$\lambda=1:\pi$，則所写的方程有重根$a=0$。这时方程(382)有解$\varphi(\xi)=C_1+C_2\xi$，且按照(381)，我們得着方程(380)的下面的解：

$$\psi(x)=\frac{C_1+C_2'\lg x}{\sqrt{x}},$$

其中 C_1 及 C_2 是任意常数。

4. 考察第一种积分方程：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}(x-t)}\,dt = f(x)\text{。} \tag{384}$$

由于上例的結果，核的双边拉普拉斯变换将是：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{\pi}{\cos s\pi},$$

且應用双边拉普拉斯变换到方程(384)，得：

$$\frac{\pi}{\cos s\pi}\,\Phi(s) = F(s)\text{，亦即 } \Phi(s) = \frac{1}{\pi}\,F(s)\cos s\pi\text{。}$$

拉普拉斯变換的反演給出：

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{1}{\pi}\,F(s)\cos s\pi\cdot e^{sx}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{1}{2\pi}\,F(s)\left[e^{s(x+\pi i)}+e^{s(x-\pi i)}\right]ds\text{。}$$

將上面的积分分作兩項，我們看出，这兩項是函数 $\frac{1}{2\pi}F(s)$ 对变量 $(x\pm\pi i)$ 的双边拉普拉斯变換的反演，亦即：

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\left[f(x+\pi i)+f(x-\pi i)\right]\text{。} \tag{385}$$

上面关于拉普拉斯变换和它的反演的形式上的推导是不严格的。由于在答案中有自变量为复数的函数值 $f(z)$，自然假設已知函数 $f(z)=f(x+yi)$ 在長条 $-\pi\leqslant y\leqslant+\pi$ 内是正則函数。对于長条的内部区域来說这个要求可立即从方程(384)本身获得，假如認为这方程有解，且把这方程中的积分看作是依賴于參数 x 的积分[III$_2$; 70]。此外，若令积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+yi)|^2dx$$

对于滿足条件 $-\pi\leqslant y\leqslant+\pi$ 的一切値 y 有不依賴于 y 的某常数为其上界，且設对于函数(385)积分(384)有意义，則公式(385)确实給出方程(384)的解，且 $\varphi^2(x)$ 在区間$(-\infty, +\infty)$内的积分有意义(鉄其馬虛；第405頁)。

53. 半無穷区間的情况 当在具有依賴于差的核的积分方程中，基本区間不是$(-\infty, +\infty)$而是$(0, +\infty)$时，在这情况双边拉普拉斯变換業已不能采用，因而問題变为更加复杂。

我們將指出解这样方程的方法，它是 B. A. 福克在他的論文“关于数学物理的几个积分方程”中給出的，且叙述他所获得的結果。

考察方程：

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}K(x-t)\varphi(t)\,dt\text{。}\tag{386}$$

假設核是对称的，亦即

$$K(-x)=K(x)\text{。}\tag{387}$$

函数 $f(x)$ 在区間 $0\leqslant x<+\infty$ 上及 $K(x)$ 在区間 $-\infty<x<+\infty$ 上都是已知的。对于这些函数的假設將在下面指出。在区間 $0\leqslant x<+\infty$ 上存在着函数 $\varphi(x)$。如果認为当 $x<0$ 时 $\varphi(x)=0$，則我們可將它解析延拓到区間 $-\infty<$ $<x<0$ 上。

这时当 $x<0$ 时，方程(386)給出：

$$f(x)=-\int_0^{\infty}K(x-t)\varphi(t)\,dt\text{。}\tag{388}$$

因此，假如認为 $x<0$ 时 $\varphi(x)=0$，并注意到(388)，我們可写方程(386)为如下形式：

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)\varphi(t)\,dt\text{。}\tag{389}$$

和前面一样，記

$$\Phi(s)=L_2(\varphi);\quad F(s)=L_2(f);\quad L(s)=L_2(K),$$

得到方程：

$$\Phi(s)=F(s)+L(s)\Phi(s)\text{。}\tag{390}$$

困难归結于 $F(s)$ 是未知的，因为当 $x<0$ 时 $f(x)$ 是由公式(388)确定的，而在这式里面出現了 $\varphi(x)$。对于我們来說，只是下函数：

$$F_1(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)\,dx\tag{391}$$

是已知的。我們注意，卷定理及反演公式給出：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)\varphi(t)\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{xt}L(t)\Phi(t)\,dt\text{。}\tag{392}$$

將(389)的兩端乘以 e^{-sx} 且在区間 $0\leqslant x<\infty$ 上对 x 积分，注意到(392)，我們得：

$$\Phi(s)=F_1(s)+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}e^{-sx}\left[\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{xt}L(t)\Phi(t)\,dt\right]dx\text{。}\tag{393}$$

我們用这关系式代替(390)。

現在陈述关于$f(x)$及$K(x)$的假設。設$K(x)$是連續的，且存在这样正常数c，使函数

$$K_1(x)=e^{c|x|}K(x) \tag{394}$$

絕对可积且当$-\infty<x<+\infty$时有有限个上升或下降区間。此外，当$x\to\pm\infty$时$K_1(x)\to 0$，且存在这样常数M，使

$$|K(x)|\leqslant Me^{-c|x|}。$$

也与$K_1(x)$一样，設$f(x)$絕对可积，且当$-\infty<x<+\infty$时有有限个上升或下降区間。在这些假設下，函数$L(s)$在長条

$$-c<Rs<+c \tag{395}$$

的内部將是正则的，且直到長条的境界上是連續的，其中R是实部的符号，且$F_1(s)$在$Rs>0$时是正则的，且直到純虛軸上是連續的。由于(387)有$L(-s)=$
$=L(s)$。

应用第二中値定理，容易証明，乘积$sL(s)$及$sF(s)$在提及的区域内关于模是有界的。要注意的是当$x<0$时$\varphi(x)=0$，我們应有：

$$\Phi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\varphi(x)\,dx, \tag{396}$$

于是比方說若$\varphi(s)$是絕对可积，則当$Rs>0$时$\Phi(s)$应是正则的。我們將假設当$Rs\geqslant 0$时$s\Phi(s)$关于模是有界的，因而可应用柯西公式到函数$\Phi(s)$。由于前面所說的，它也可应用到$F_1(s)$：

$$\Phi(s)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Phi(t)}{t-s}\,dt;\quad F_1(s)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{F_1(t)}{t-s}\,dt。 \tag{397}$$

我們將假設在公式(393)中$Rs>0$。那末在二次积分中可交換积分的次序，得：

$$\Phi(s)=F_1(s)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{L(t)\Phi(t)}{t-s}\,dt,\quad (Rs>0),$$

或者代入(397)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{H(t)}{t-s}\,dt=0,\quad (Rs>0), \tag{398}$$

其中

$$H(t)=\Phi(t)[1-L(t)]-F_1(t)。 \tag{399}$$

在以后我們需要下面的

引理 若$G(s)$在長条$a\leqslant Rs\leqslant b$的内部是正则的，直到境界上是連續的，

且当 $a\leqslant Rs\leqslant b$ 时乘积 $s^{\alpha}G(s)$ 关于模有界，其中 $\alpha>0$，则 $G(s)$ 可表示为和的形式：

(400) $$G(s)=G_1(s)+G_2(s),$$

其中 $G_1(s)$ 在区域 $Rs>a$ 内是正則的而 $G_2(s)$ 在区域 $Rs<b$ 内是正則的。

从柯西公式立卽得到証明，并且：

$$G_1(s)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{G(t)}{t-s}\,dt;$$

$$G_2(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{G(t)}{t-s}\,dt.$$

回到由公式(399)确定的函数 $H(s)$。在 $\Phi(s)$，$L(s)$ 及 $F_1(s)$ 是正則的地方，亦卽当 $0<Rs<c$ 时它应是正則的。应用上面的引理到 $H(s)$，且注意到(398)，可断定当 $Rs<c$ 时 $H(s)$ 应是正則的。

这样一来，我們引出下面的結果：$\Phi(s)$ 应在 $Rs>0$ 内是正則的，而且它使公式(399)确定的 $H(s)$ 在 $Rs<c$ 内是正則的。函数 $L(s)$ 及 $F_1(s)$ 是已知的，且已在上面指出了它們的性質。考察下面的差：

(401) $$1-L(s).$$

它在長条(395)内确定的且当 $|s|\to\infty$ 时趋于一。在任何較狹窄的長条 $-c'<Rs<+c'$ $(c'<c)$ 内它只有有限个零点。首先設在 $1-L(s)$ 的零点中沒有純虛的。这时我們可选取 c' 这样迫近于零，使在長条：

(402) $$-c'<Rs<+c'$$

内，函数(401)根本沒有零点。引入函数：

(403) $$M(s)=-\lg[1-L(s)],$$

它在長条(402)的内部是正則的。从等式 $L(-s)=L(s)$ 推出 $M(-s)=M(s)$。对数的值是这样选定，要使当 $\operatorname{Im}s\to+\infty$ 时，$M(s)\to0$，此处 $\operatorname{Im}s$ 是 s 的純虛部。这时由于 $M(s)$ 的偶性，將有当 $\operatorname{Im}s\to-\infty$ 时 $M(s)\to0$，且 $sM(s)$ 在長条(402)内关于模有界的。应用引理到 $M(s)$：

(404) $$M(s)=M_1(s)+M_2(s),$$

其中 $M_1(s)$ 在 $Rs>-c'$ 内是正則的而 $M_2(s)$ 在 $Rs<c'$ 内是正則的。

不难証明，$M_2(s)=M_1(-s)$。引入函数

(405) $$N_1(s)=e^{M_1(s)};\quad N_2(s)=e^{M_2(s)},$$

則可以写出：

(406) $$\frac{1}{1-L(s)}=N_1(s)N_2(s).$$

这时当 $Rs>-c'$ 时 $N_1(s)$ 是正则的且不等于零，而 $N_2(s)$ 当 $Rs<c'$ 时也是这样。此外，$N_2(s)=N_1(-s)$。函数 $M_1(s)$ 及 $M_2(s)$ 在無穷远处变为零，而 $N_1(s)$ 及 $N_2(s)$ 則变为一。將(406)代入(399)：

$$H(s)=\frac{\Phi(s)}{N_1(s)N_2(s)}-F_1(s),$$

从而：

$$H(s)N_2(s)=\frac{\Phi(s)}{N_1(s)}-F_1(s)N_2(s)\text{。} \tag{407}$$

对于長条 $0<Rs<c'$ 我們可再应用引理到乘积 $F_1(s)N_2(s)$：

$$F_1(s)N_2(s)=Q_1(s)+Q_2(s), \tag{408}$$

其中 $Q_1(s)$ 在 $Rs>0$ 內是正则的而 $Q_2(s)$ 在 $Rs<c'$ 內是正則的，且在無穷远处两个函数都变为零。將(408)代入(407)，可写：

$$H(s)N_2(s)+Q_2(s)=\frac{\Phi(s)}{N_1(s)}-Q_1(s)\text{。}$$

这等式的左端当 $Rs<c'$ 时是正则的，而右端当 $Rs>0$ 时是正则的，因之两端在整个平面上都是正则的。在無穷远处它們等于零，由于柳維尔定理，两端都恒等于零，亦卽有：

$$\Phi(s)=N_1(s)Q_1(s), \tag{409}$$

并且函数 $N_1(s)$ 及 $Q_1(s)$ 是以已知函数 $L(s)$ 及 $F_1(s)$ 作为基础而構成的。既知 $\Phi(s)$，可借助于拉普拉斯变换求出 $\varphi(x)$：

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{sx}\Phi(s)\,ds\text{。} \tag{410}$$

以上的一切叙述，都可以看作是为准备导出(410)而作的。

在提过的 B. A. 福克的論文中曾証明(410)中的积分存在，由公式(410)确定的函数 $\varphi(x)$ 滿足方程(386)且在無穷远点变为零，且这解是唯一的。

設 σ_0 是函数(401)的最近于純虛軸的零点的实部。在提过的福克的論文中曾証明，齐次方程

$$\varphi(x)=\int_0^\infty K(x-t)\varphi(t)\,dt \tag{411}$$

沒有滿足条件：

$$|\varphi(x)|\leqslant Ce^{\sigma x},\quad (\sigma<\sigma_0) \tag{412}$$

的解。

当函数(401)有純虛零点时，这情况的討論更加复杂了。由于 $L(s)$ 的偶

性，这样零点的个数是偶数。記这个数为 $2n$。这时可証明齐次方程(411)恰有满足条件(412)的 n 个解 $\psi_1(x),\cdots,\psi_n(x)$，且对于方程(386)可解性的必要且充分的条件是：

$$\int_0^\infty \psi_k(x)f(x)dx=0, \quad (k=1, 2, \cdots, n). \tag{413}$$

如果这些条件已实現，則方程(386)有解，它在無穷远点等于零，且这解是唯一的。而唯一性是由于函数 $\psi_k(x)$ 的任何綫性組合在無穷远点处不为零的原故。也可証明函数 $\psi(x)$ 增加到無穷大的情况不比 x 的某幂增加得更快些。

54. 齐次方程 現在考察齐次方程(411)。这时我們必須認为当 $x>0$ 时 $f(x)=0$ 且当 $x<0$ 时 $f(x)$ 是由公式(388)确定的。我們將只討論这样的解，它满足条件：

$$|\varphi(x)|\leqslant Ce^{ax}, \tag{414}$$

其中 C 是某常数且 a 是满足条件 $0<a<C$ 的固定数。从(414)推出 $\Phi(s)$ 在 $Rs>a$ 内应是正則的且当 $Rs>a+\varepsilon$ 时是有界的，其中 $\varepsilon>0$。

从(388)得出：

$$|f(x)|\leqslant\int_0^\infty |K(x-t)|\,|\varphi(t)|dt\leqslant C\int_0^\infty |K(x-t)|e^{at}dt, \quad (x<0).$$

取满足条件 $a<b<c$ 的任一数 b，則可写：

$$|f(x)|\leqslant C\int_0^\infty |K(x-t)|e^{bt}dt, \quad (x<0),$$

或者引入新积分变量 $y=t-x$：

$$|f(x)|\leqslant Ce^{bx}\int_{-x}^\infty |K(-y)|e^{by}dy=Ce^{bx}\int_{-\infty}^{x}|K(y)|e^{b|y|}dy, \quad (x<0),$$

从而，由于 $x<0$：

$$|f(x)|\leqslant Ce^{bx}\int_{-\infty}^0 |K(y)|e^{b'y}dy, \quad (x<0),$$

亦即对于小于 c 的任何值 b（且充分追近于 c 的），我們有：

$$|f(x)|\leqslant Ce^{bx}, \quad (x<0).$$

从这里，由于当 $x>0$ 时 $f(x)=0$，可見当 $Rs<c$ 时 $F(s)$ 是正則的，且当 $Rs<c-\varepsilon(\varepsilon>0)$ 时是有界的。

現在固定一个数 c'，使它满足条件 $0<a<c'<c$。

在長条 $(-c'<Rs<c')$ 内差 $1-L(s)$ 只有有限个(偶数)零点。設 $s_1, s_2, \cdots,$

s_{2n} 是这些零点，其中可能有相同的。此处我們不作没有純虛零点的假設。作函数：

$$(415)\qquad \omega(s)=[1-L(s)]\frac{(s^2-d)^n}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_{2n})}$$

(其中 d 是大于 c' 的正数)，它在長条 $(-c'<Rs<c')$ 內是正則的，在其中不等于零且在無穷远点等于一。

从 $L(s)$ 的偶性，推知零点 s_k 关于 $s=0$ 对称的，因而 $\omega(s)$ 也是偶函数。和[53]中一样，应用引理到函数 $\lg\omega(s)$。

改变某些記号，我們写：

$$\lg\omega(s)=\lg\omega_2(s)-\lg\omega_1(s),$$

且引入新函数：

$$L_2(s)=(-1)^n\omega_2(s)(d-s)^{-n};\quad L_1(s)=\omega_1(s)(d+s)^n。$$

这时从(415)得：

$$(416)\qquad 1-L(s)=\frac{L_2(s)}{L_1(s)}(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_{2n})。$$

这时当 $Rs>-c'$ 时 $L_1(s)$ 是正則的且不等于零，而当 $Rs<c'$ 时 $L_2(s)$ 是一样的，从而模

$$|L_1(s)s^{-n}|,\quad |L_2(s)s^n|$$

都是有界的。

从方程(390)及(416)推出：

$$(417)\qquad \frac{F(s)}{L_2(s)}=\frac{\Phi(s)}{L_1(s)}(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_{2n})。$$

当 $Rs\leqslant c'$ 时这等式的左端是正則函数，而当 $Rs\geqslant c'$ 时右端也是正則的，因之在整个平面上兩端都是正則的。設 $P(s)$ 是对应的整函数。从上面指出的估計，則函数 $P(s):s^n$ 無論当 $Rs\leqslant c'$ 时或当 $Rs\geqslant c'$ 时关于模总是保持有界的。設：

$$\frac{a_0}{s^n}+\frac{a_1}{s^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{s}$$

是函数 $P(s):s^n$ 在極点 $s=0$ 的主要部份。差：

$$\frac{P(s)}{s^n}-\left(\frac{a_0}{s^n}+\frac{a_1}{s^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{s}\right)$$

在有限距离內没有奇点且当 $|s|\to\infty$ 时保持有界。由柳維尔定理这个差是常数。若注意当純虛部在对应的半平面內無限增大时 $F(s)\to 0$，則这时

$P(s)$: $s^n \to 0$，从而提到的常数等于零，亦即

$$P(s)=a_0+a_1s+\cdots+a_{n-1}s^{n-1}。$$

因此，(417)的兩端都是不高于$(n-1)$次的多項式，因而我們可决定$\Phi(s)$：

(418) $$\Phi(s)=\frac{L_1(s)P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_{2n})},$$

从而

(419) $$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{sx}\frac{L_1(s)P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_{2n})}ds。$$

若取$P(s)$为任意$(n-1)$次多項式，則这公式給出方程(411)的一切解，对于任何正数ε，它滿足条件：

(420) $$|\varphi(x)|\leqslant Ce^{(c'+\varepsilon)x}。$$

这結果严格的証明及沒有对称核的条件(387)的齐次方程的討論可在維納尔及霍普夫的論文中找到(Wiener und Hopf "Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Preuss. Akad., 1931)。

关于对称核的情况这論文中的主要結果是：若$1-L(s)$在長条(395)內有$2n$个零点，而多重零点按重数計算若干次，則方程(411)恰有n个解，它們滿足条件(420)，且这些解有如下形式：

(421) $$\varphi(x)=\sum Q(x)e^{s_0x}+O(e^{-hx}),$$

其中和的符号是对于提到的一切零点而取的，且$Q(x)$是不高于$(m-1)$次的多項式，其中m是零点s_0的級。h是这样的数$c'<h<c$，且在長条$c'<Rs<h$及$-h<Rs<-c'$內函数$1-L(s)$沒有零点。

和通常一样[III$_2$; 79]，記号$O(e^{-hx})$表示一个量，对于它来說，乘积$e^{hx}O(e^{-hx})$当$x\to+\infty$时保持有界。所述結果是借助于公式(419)而获得的。

55. 例 1. 考察对称核：

$$K(x)=\lambda e^{-|x|}=\begin{cases}\lambda e^{-x}, & 当\ x\geqslant 0\ 时；\\ \lambda e^{x}, & 当\ x\leqslant 0\ 时，\end{cases}$$

其中λ是实参数。我們可取小于一的任何正数作为c(及c')。函数$L(s)$將是：

(422) $$L(s)=\lambda\int_0^{\infty}e^{-sx}e^{-x}dx+\lambda\int_{-\infty}^{0}e^{-sx}e^{x}dx=\frac{2\lambda}{1-s^2}$$

且

(423) $$1-L(s)=\frac{s^2+2\lambda-1}{s^2-1}。$$

这函数的零点是：

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{1-2\lambda}。\tag{424}$$

暂認为 $\lambda<\frac{1}{2}$，且引用正数 μ

$$\mu^2=1-2\lambda,$$

因此 $\lambda_{1,2}=\pm\mu$。容易驗証分解式(406)將是：

$$\frac{1}{1-L(s)}=\frac{s+1}{s+\mu}\cdot\frac{s-1}{s-\mu}=N_1(s)\cdot N_2(s)。$$

按照(408)，乘积 $F_1(s)N_2(s)$ 必須分作兩項，其中 $Q_1(s)$ 当 $Rs>0$ 时是正则的，而 $Q_2(s)$ 当 $Rs<\mu$ 时是正则的，并且二者在無穷远点皆应等于零。这时必須記起的是，当 $Rs>0$ 时 $F_1(s)$ 是正则的且它在無穷远点等于零。不难检驗，待求的分解式有如下形式：

$$F_1(s)\frac{s-1}{s-\mu}=\frac{(s-1)F_1(s)-(\mu-1)F_1(\mu)}{s-\mu}+\frac{(\mu-1)F_1(\mu)}{s-\mu}。$$

然后按照(409)，我們得：

$$\Phi(s)=\frac{(s^2-1)F_1(s)-(\mu-1)F_1(\mu)(s+1)}{s^2-\mu^2}$$

且当 $\lambda<\frac{1}{2}$ 时，方程：

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^\infty e^{-|x-t|}\varphi(t)dt$$

的解有如下形式：

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{sx}\frac{(s^2-1)F_1(s)-(\mu-1)F_1(\mu)(s+1)}{s^2-\mu^2}ds,\tag{425}$$

$$(0\leqslant\sigma<\mu)。$$

現在討論齐次方程：

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\infty e^{-|x-t|}\varphi(t)dt,\tag{426}$$

且采用[54]中的結果。若 $\lambda<0$，則函数(423)在長条 $-1<Rs<+1$ 的內部沒有零点，因而对于在区間 $0<\alpha<1$ 的任何 α 方程(426)沒有滿足条件(414)的解。若 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq\frac{1}{2}$，則函数(423)有不相同的零点(424)，且按照公式(416)，可將函数(423)表示为如下形式：

$$1-L(s)=\frac{L_2(s)}{L_1(s)}(s-s_1)(s-s_2),\tag{427}$$

其中 $$L_1(s)=s+1;\quad L_2(s)=\frac{1}{s-1}。$$

在这情况 $n=1$，因而除了一个常数因子不定外，方程 (426) 的一个解由公式 (419) 所决定，其中 $P(s)$ 是常数，可認为它等于一：

(428) $$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{sx}\frac{s+1}{s^2+2\lambda-1}ds。$$

在这公式中当 $0<\lambda<\frac{1}{2}$ 时应取 $\sigma>\sqrt{1-2\lambda}$，且当 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时取 $\sigma>0$。从积分直綫的左边添加半徑很大的半圓周，应用約当引理及留数定理，得到：

(429) $$\varphi(x)=\frac{\sqrt{1-2\lambda}+1}{2\sqrt{1-2\lambda}}e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x}+\frac{\sqrt{1-2\lambda}-1}{2\sqrt{1-2\lambda}}e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}。$$

若 $\lambda=\frac{1}{2}$，則函数 (423) 有二級零点 $s=0$，且公式 (428) 給出：

(430) $$\varphi(x)=1+x。$$

当 $0<\lambda<\frac{1}{2}$ 时，解 (429) 如同 $e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x}$ 一样地增大，且 $\sqrt{1-2\lambda}$ 的値就是我們在[53]中曾記作 σ_0 的。在这情况，方程 (426) 沒有滿足条件 (412) 的解。現在設 $\lambda>\frac{1}{2}$，且記 $\nu^2=2\lambda-1\ (\nu>0)$。解 (429) 可写作形式：

$$\varphi(x)=\cos\nu x+\frac{\sin\nu x}{\nu},$$

于是，在这情况方程 (426) 有有界解。当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时解 (430) 如同 x 的一次冪一样地增加。当 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 时我們有非齐次方程 (386) 的可解条件，这在[53]中已經談到过：

$$\int_0^\infty\left(\cos\nu x+\frac{\sin\nu x}{\nu}\right)f(x)dx=0\quad 或\quad \int_0^\infty(1+x)f(x)dx=0。$$

2. 考察齐次方程，它的核是由下列公式（米尔因方程）确定的：

$$K(x)=\frac{1}{2}\int_{|x|}^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt。$$

当 $x=0$ 时，这函数变为 $\lg x$ 阶的無穷大。前面方法的采用在这情况不受影响（参閱維納尔及霍普夫的論文）。

作函数 $L(s)$：

$$L(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{sx}\left[\frac{1}{2}\int_{|x|}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{sx}\left[\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{sx}\left[\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]dx。$$

在第一項中的二次积分無异于計算一个二重积分，积分区域是平面 (x, t) 上第一象限內实現不等式 $t\geqslant x$ 的部份。进行积分次序的变换，可將这第一項写作形式：

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\left[\int_{0}^{t}e^{sx}dx\right]dt=\frac{1}{2s}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{(s-1)t}-e^{-t}}{t}\,dt\,。$$

所写出的积分是可以算出的，例如，对参数 s 求微商，就得着：

$$\frac{1}{2s}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{(s-1)t}-e^{-t}}{t}\,dt=-\frac{1}{2s}\lg(1-s)\,,$$

其中我們假設 s 的实部小于一。完全一样地可計算在 $L(s)$ 的表达式中的第二項，且得着：

$$L(s)=\frac{1}{2}\lg\frac{1+s}{1-s},\quad (s=\sigma+i\tau;\ -1<\sigma<1),$$

并且必須取那样的对數值，使当 $s=0$ 时它变为零。展开对數为冪級数，我們确信方程

$$1-\frac{1}{2s}\lg\frac{1+s}{1-s}=0$$

有二重零点 $s=0$。

可以証明，它沒有实部包含在区間 $(-1, +1)$ 的內部的其他零点。函数 (415) 將是：

$$\omega(s)=\left(1-\frac{1}{2s}\lg\frac{1+s}{1-s}\right)\cdot\frac{s^2-1}{s^2}。$$

其次，可以确定 $\lg\omega_1(s)$，$L_1(s)$，因而最后按公式 (419) 就可得到 $\varphi(x)$。

56. 有柯西核的第一种积分方程 現在着手于在一維情况內某些簡單的积分方程的叙述，在其中的积分应認为是主值意义的 [**III**$_2$; **26**]。这时应用以前叙述过的联系着积分的主值及柯西型积分 [**III**$_2$; **26, 27, 28**] 的結果。这样的奇性积分方程的基本理論是由博安加雷及希尔伯特所給出的。至于以后关于这理論的更广泛的發展是由苏联数学家获得的。在一維情况內全部理論的系

統叙述，見于 Н. И. 穆斯黑利施維里所著“奇异积分方程”（莫斯科，1946）及 Н. П. 費庫娃所著“奇异积分方程組及某些边界問題”（莫斯科，1950）二書中。对于这理論的一般介紹还要指出 С. Г. 米哈林的論文“奇异积分方程”（数学科学的进展，III，3(25)，1948）。

以后，我們說到的光滑圍道是認为它的方程为：$x=x(s)$，$y=y(s)$，其中 s 是弧長且函数 $x(s)$，$y(s)$ 有直到二阶的連續导数。

从具有柯西核的第一种积分方程开始：

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=f(\xi), \tag{431}$$

其中 L 是平滑閉圍道，$f(\xi)$ 是已知函数，且在 L 上滿足李普希茲条件。

关于待求函数 $\omega(\tau)$，將設它滿足李普希茲条件。

以前我們曾有公式[**III**$_2$; **28**]：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\xi-\eta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right]d\xi=\frac{1}{4}\omega(\eta), \tag{432}$$

从它立即有，函数

$$\omega(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-\tau}\,d\xi \tag{433}$$

滿足方程（431）。不难看出，这方程的解是唯一的。事实上，將（431）的兩端乘以 $\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{1}{\xi-\eta}$，对 ξ 积分且注意(432)，我們得到(433)。簡單說来，由于公式(432)所联系，公式(431)及(433)是互为因果的。应指出的是，如果 $f(\xi)$滿足李普希茲条件，則从(433)立即推知 $\omega(\tau)$ 也滿足这条件[**III**$_2$; **27**]。

57. 解析函数的边界問題 在轉到有柯西核的积分方程的求解之前，我們要对于解析函数某些边界問題进行討論。預先引出一个新概念且將証明一个輔助定理。

設某函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的鄰域內是正則的。如果在無穷远点

鄰域内它的展式有形式：

$$f(z)=z^m\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\right),\quad (a_0\neq 0), \tag{434}$$

則謂它在無穷远点有有限級，且整数 m（正，負，或零）称作 $f(z)$ 在無穷远点的級。若 $m\leqslant 0$，則 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 是正則的，若 $m>0$，則 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的極点。当 $m<0$ 时，我們有 $f(\infty)=0$。

定理 設 $f(z)$ 在 z 的全平面上是正則的，且在無穷远点有有限級，則 $f(z)$ 是多項式。

在所考察的情况展开式(434)在 z 的全平面上成立，且这展开式应当不含有 z 的負冪，因为 $z=0$ 应該是 $f(z)$ 的正則点。这样一来，当 $m>0$ 时函数 $f(z)$ 是多項式，而当 $m=0$ 时是常数（零次多項式）。在特殊情况，这常数可能为零。恒等于零的函数也將看为在無穷远点有有限級。它的級算做等于零，正像不等于零的常数一样。所証的定理实質上是柳維尔定理的拓广[III$_2$; 9]。

設 L 是光滑閉圍道。求解下面三个边界問題。

問題 1 求在 L 的内部是正則的函数 $\varphi^+(z)$ 及在 L 的外部是正則的且在無穷远点有有限級的函数 $\varphi^-(z)$，使这兩个函数直到 L 都是連續的，且在 L 上有关系式：

$$\varphi^+(\tau)-\varphi^-(\tau)=f(\tau),\quad (\tau \text{ 在 } L \text{ 上}), \tag{435}$$

其中 $f(\tau)$ 是在 L 上满足李普希茲条件的已知复函数。

公式：

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau \tag{436}$$

确定在 L 的内部为正則的函数 $\varphi_0^+(z)$，及在 L 的外部为正則的函数 $\varphi_0^-(z)$，且在無穷远点等于零。

由于对柯西型积分的極限值公式[III$_2$; 28]：

$$
(437)\qquad
\begin{aligned}
\varphi_0^+(\tau) &= \frac{1}{2} f(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-\tau}\,d\xi,\\
\varphi_0^-(\tau) &= -\frac{1}{2} f(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-\tau}\,d\xi,
\end{aligned}
$$

我們看到，$\varphi_0^-(\tau)$及$\varphi_0^-(\tau)$满足条件(435)，亦郎公式(436)給出問題1的解。不难看出，$\varphi_0^+(\tau)$及$\varphi_0^-(\tau)$也满足李普希兹条件[**III**$_2$;**27**]。显然，函数

$$
(438)\qquad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau + P(z)
$$

也給出問題1的解，其中$P(z)$是任意多項式，并且$\varphi^+(\tau)$及$\varphi^-(\tau)$满足李普希兹条件。

我們証明，这公式給出問題1的一切解。設$\varphi^+(z)$及$\varphi^-(z)$是問題1的任何解。从(435)及对于$\varphi_0(z)$的同样关系式有：

$$
\varphi^+(\tau) - \varphi_0^+(\tau) = \varphi^-(\tau) - \varphi_0^-(\tau), \quad (\tau\text{ 在 }L\text{ 上}),
$$

亦郎差：$\qquad \varphi^+(z) - \varphi_0^+(z);\quad \varphi^-(z) - \varphi_0^-(z)$

在L上有相同値，这也就是說这两个差确定在全平面上正則的函数[**III**$_2$; **24**]且在無穷远点有有限級。由于上面証明过的定理指出这两个差等于同一多項式$P(z)$，从而得着公式(438)。

如果规定了条件$\varphi^-(\infty)=0$，則在公式(438)中必須令$P(z)\equiv 0$。現在我們叙述第二問題，它是希尔伯特首先討論的，并且以后將認为点$z=0$是在L的內部。

問題2(希尔伯特齐次問題) 在上一問題的同样要求下来求$\varphi^+(z)$及$\varphi^-(z)$，但以下面条件：

$$
(439)\qquad \varphi^+(\tau) = g(\tau)\varphi^-(\tau), \quad (\tau\text{ 在 }L\text{ 上})
$$

代替条件(435)，其中$g(\tau)$是在L上满足李普希兹条件且不等于零的已知复函数。

設k是整数，它等于当点τ在围道L上环行一周后$g(\tau)$的幅角获得的增量除以2π：

(440) $$k=\frac{1}{2\pi}[\arg g(\tau)]_L。$$

下函数：

(441) $$g_0(\tau)=\tau^{-k}g(\tau)$$

的幅角当 τ 环行圍道 L 一周后沒有改变，因而 $\lg g_0(\tau)$ 在 L 上是連續函数。这时我們可固定对数的任何一支。

不难証明，$\lg g_0(\tau)$ 也像 $g_0(\tau)$ 一样滿足李普希茲条件，我們不停留在这一点上。作函数：

(442) $$\psi_0(z)=e^{\omega_0(z)},$$

其中

(443) $$\omega_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\lg g_0(\tau)}{\tau-z}\,d\tau。$$

一般地說，当 z 在 L 的内部及外部时，这公式确定不同的正則函数：

(444) $$\psi_0^+(z)=e^{\omega_0^+(z)};\quad \psi_0^-(z)=e^{\omega_0^-(z)},$$

且利用对于柯西积分的極限值公式(437)，可立即檢驗出函数(444)在 L 上滿足关系式：

(445) $$\psi_0^+(\tau)=g_0(\tau)\psi_0^-(\tau)。$$

引进在 L 的内部及外部为正則的新函数：

(446) $$\varphi_0^+(z)=\psi_0^+(z);\quad \varphi_0^-(z)=z^{-k}\psi_0^-(z)。$$

注意到(441)及(445)，我們看出，$\varphi_0^+(z)$ 及 $\varphi_0^-(z)$ 是希尔伯特齐次問題的解。从(443)及(444)知 $\omega_0(\infty)=0$ 及 $\psi_0(\infty)=1$，因而由于(446)，可断言 $\varphi_0^-(z)$ 在無穷远点的級等于 $(-k)$。

还应注意的是，$\varphi_0^+(z)$ 在任何点都不为零，而 $\varphi_0^-(z)$ 只在 $z=\infty$ 时可变为零。若 $P(z)$ 是任意多項式，則函数

(447) $$\psi^+(z)=P(z)\varphi_0^+(z);\quad \psi^-(z)=P(z)\varphi_0^-(z)$$

也是希尔伯特齐次問題的解。若 m 是 $P(z)$ 的次数，則 $\psi^-(z)$ 在無穷远点的級等于 $(m-k)$。这时，像在問題 I 中一样，$\varphi^+(\tau)$ 及 $\varphi^-(\tau)$

滿足李普希茲条件。

还要証明，公式(447)确定所提問題的一切解。事实上，設 $\varphi^+(z)$ 及 $\varphi^-(z)$ 是問題的任何解。比式

$$\frac{\varphi^+(z)}{\varphi_0^+(z)}, \quad \frac{\varphi^-(z)}{\varphi_0^-(z)} \tag{448}$$

分别在 L 的內部及外部是正则的，且它們之中的第二个在無穷远点有有限級。此外，这两个比式在 L 上是相等的。因之，关系式(448)确定在全平面上是正則的函数且在無穷远点有有限級，因而由于上面証明的定理，这函数是多項式，从而得着对于 $\varphi^+(z)$ 及 $\varphi^-(z)$ 的公式(447)。

問題 3（希尔伯特非齐次問題） 在前面問題的同样要求下来求 $\varphi^+(z)$ 及 $\varphi^-(z)$，但以下面的条件：

$$\varphi^+(\tau)=g(\tau)\varphi^-(\tau)+f(\tau), \quad (\tau \text{ 在 } L \text{ 上}) \tag{449}$$

代替条件(439)，其中 $g(\tau)$ 及 $f(\tau)$ 都是在 L 上滿足李普希茲条件的已知函数，且 $g(\tau)\neq 0$。

設 $\varphi_0^+(z)$ 及 $\varphi_0^-(z)$ 是所建立的問題 2 的解，且設它們都不为零。从(439)得着：$g(\tau)=\varphi_0^+(\tau):\varphi_0^-(\tau)$，將这函数代入(449)，因而这条件可写作如下形式：

$$\frac{\varphi^+(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)}-\frac{\varphi^-(\tau)}{\varphi_0^-(\tau)}=\frac{f(\tau)}{\varphi_0^-(\tau)}, \tag{450}$$

亦即我們归結到对于比式 $\dfrac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ 的問題 1，从而由于(438)：

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau+P(z), \tag{451}$$

其中 $P(z)$ 是任意多項式，因之最后得：

$$\varphi(z)=\frac{\varphi_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau+P(z)\varphi_0(z)。 \tag{452}$$

对位于 L 的內部的区域，我們应取 $\varphi_0^+(z)$ 以代替 $\varphi_0(z)$，而对位于 L 的外部的区域則取 $\varphi_0^-(z)$。公式(452)給出問題 3 的一般

解。函数 $\varphi_0^+(z)$ 及 $\varphi_0^-(z)$ 由公式(446)确定而数 k 是由公式(440)确定的。右端的第一項在無穷远点的級为$(-k-1)$而第二項的級为$(m-k)$，其中 m 是 $P(z)$ 的次数。如同前面的問題一样，$\varphi^+(\tau)$ 及 $\varphi^-(\tau)$ 满足李普希兹条件。

現在闡明关于問題 3 的那些解在無穷远点变为零的問題。換句話說，我們寻求在無穷远点有負数級的解。考虑次列各种情况：$k>0$，$k=0$ 及 $k<0$。若 $k>0$，則公式(452)的第一項在無穷远点有負数級，而第二項当且仅当 $m<k$ 时在無穷远点有負数級，亦即当 $k>0$ 时，如果取 $P(z)$ 为次数小于 k 的任意多項式，則公式(452)給出問題 3 的在無穷远点等于零的一般解。在这情况我們有無穷多个問題 3 的解，它們在無穷远点等于零。一般解含有 k 个任意常数[就是 $P(z)$ 的系数]。

若 $k=0$，則第一項在無穷远点的級仍然是負的，而在第二項中必須取 $P(z)\equiv 0$。這时問題 3 的解显然是唯一的。若 $k<0$，則注意于上面講过的关于公式 (452) 的右端的各項的級，必須取 $P(z)\equiv 0$，除此以外，在第一項中应不含有 $z^{-k-1}, z^{-k-2}, \cdots, z^0$ 的各項，亦即在当 $|z|$ 充分大时成立的积分展开式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau = -\frac{z^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)}\,d\tau - \frac{z^{-2}}{2\pi i}\int_L \frac{\tau f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)}\,d\tau - \cdots$$

中应不含有 $z^{-1}, z^{-2}, \cdots, z^{-k}$ 的各項。這就引到問題 3 有在無穷远点等于零的解的必要且充分的条件：

$$\int_L \frac{\tau^s f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)}\,d\tau = 0, \quad (s=0, 1, \cdots, k-1)。 \tag{453}$$

当這些条件实現时，問題 3 在無穷远点等于零的解是唯一的且由公式(452)在 $P(z)\equiv 0$ 时所确定。

58. 有柯西核的第二种积分方程 考虑方程

(454) $$A(\xi)\varphi(\xi)+\frac{B(\xi)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}d\tau=f(\xi),$$

其中 $A(\xi)$, $B(\xi)$, $f(\xi)$ 都是在 L 上满足李普希兹条件的已知函数，并且認为

(455) $A(\xi)+B(\xi)\neq 0$ 及 $A(\xi)-B(\xi)\neq 0$, （ξ 在 L 上）。

待求的解 $\varphi(\xi)$ 也是在满足李普希兹条件的函数类中。引入函数

(456) $$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau。$$

在前面指出的記号下从(437)得：

(457) $$\varphi(\xi)=\Phi^+(\xi)-\Phi^-(\xi),$$

(458) $$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}d\tau=\Phi^+(\xi)+\Phi^-(\xi)。$$

代入(454)，得到：

(459) $$[A(\xi)+B(\xi)]\Phi^+(\xi)-[A(\xi)-B(\xi)]\Phi^-(\xi)=f(\xi)$$

或

(460) $$\Phi^+(\xi)=\frac{A(\xi)-B(\xi)}{A(\xi)+B(\xi)}\Phi^-(\xi)+\frac{f(\xi)}{A(\xi)+B(\xi)},$$

亦即 $\Phi(z)$ 必須是問題 3 的解，它当 $z=\infty$ 时等于零且满足条件(453)。反之，設有这样的 $\Phi(z)$。由公式(457)确定了 $\varphi(\xi)$，就有了对于 $\Phi(z)$ 的公式 (456) [**57**]，从它显示出 (458)。从 (457) 及(458)确定了 $\Phi^+(\xi)$ 及 $\Phi^-(\xi)$ 且代入(460)中，得到(454)。这样一来，方程(454)的求解与在边界条件 (460) 下問題 3 的求解是等价的。这时 $\varphi(\xi)$ 由公式(457)确定。为了获得問題的完全解决，现在只要应用[**57**] 中的結果。按照公式(440)，引入整数

(461) $$k=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{A(\xi)-B(\xi)}{A(\xi)+B(\xi)}\right]_L,$$

它称作方程(459)的指数。

設 $\Phi_0(z)$ 是在条件

$$\Phi^+(\xi)=\frac{A(\xi)-B(\xi)}{A(\xi)+B(\xi)}\ \Phi^-(\xi)$$

下問題 2 异于零的解，我們在[57]中已經作出过这个解。考虑三种情况：

（1）$k>0$。这时我們有：

(462) $$\Phi(z)=$$

$$=\frac{\Phi_0(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{[A(\tau)+B(\tau)]\Phi_0^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau+P_{k-1}(z)\Phi_0(z),$$

其中 $P_{k-1}(z)$ 是 $(k-1)$ 次的任意多項式。

（2）$k=0$。解由公式(462)在 $P_{k-1}(z)\equiv 0$ 时表达，亦卽

(463) $$\Phi(z)=\frac{\Phi_0(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{[A(\tau)+B(\tau)]\Phi_0^-(\tau)(\tau-z)}\,d\tau。$$

（3）$k<0$。对于問題 3 有解的必要且充分的条件是：

(464) $$\int_L\frac{\tau^s f(\tau)}{[A(\tau)+B(\tau)]\Phi_0^+(\tau)}\,d\tau=0,$$

$$(s=0,1,2,\cdots,k-1),$$

而且如果这些条件实現，則解由公式(463)来表达。

利用公式(452)及(457)，我們現在可获得方程(454)的解。这时我們必須应用柯西型积分的極限公式。这样一来，当 $k\geqslant 0$ 时，得到：

(465) $$\varphi(\xi)=\frac{\Phi_0^+(\xi)+\Phi_0^-(\xi)}{2[A(\xi)+B(\xi)]\Phi_0^-(\xi)}\,f(\xi)+$$

$$+\frac{\Phi_0^+(\xi)-\Phi_0^-(\xi)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{[A(\tau)+B(\tau)]\Phi_0^+(\tau)(\tau-\xi)}\,d\tau+$$

$$+[\Phi_0^+(\xi)-\Phi_0^-(\xi)]P_{k-1}(\xi),$$

並且当 $k=0$ 时 $P_{k-1}(\xi)\equiv 0$。当 $k<0$ 时，若条件(464)实現，我們也得到同样結果，其中只須 $P_{k-1}(\xi)\equiv 0$。

由这里立卽推得齐次方程

$$(466)\qquad A(\xi)\varphi(\xi)+\frac{B(\xi)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=0$$

当 $k>0$ 时有通解:

$$(467)\qquad \varphi(\xi)=[\Phi_0^+(\xi)-\Phi_0^-(\xi)]P_{k-1}(\xi),$$

而当 $k\leqslant 0$ 时方程(466)只有零解。 公式(467)給出方程(466)的 k 个綫性無关的解:

$$(468)\qquad \varphi(\xi)=[\Phi_0^+(\xi)-\Phi_0^-(\xi)]\xi^s,\quad (s=0,1,2,\cdots,k-1)。$$

因此,当 $k>0$ 时,对于任何 $f(\xi)$ 非齐次方程(454)可解,而齐次方程(466)有 k 个綫性無关的解。当 $k=0$ 时,对于任何 $f(\xi)$ 方程(454)可解且有唯一解,而齐次方程(466)仅有零解。当 $k<0$ 时我們有方程(454)可解的 $(-k)$ 个条件(464),且当这些条件实現时方程(454)有唯一解。 这时齐次方程只有零解。 此处的結果是和尋常弗列德和蒙方程的結果有所不同的。

要注意的是,第一种方程:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=f(\xi)$$

是由方程(454)取 $A(\xi)=0$ 及 $B(\xi)=\frac{1}{2}$ 而得到的特殊情况。 对于这特殊情况 $k=0$。

59. 对于綫段情况的边界問題 現在討論[57]中的問題的这样情况,即代替閉圍道 L 以实軸上的綫段 $[a,b]$。今后經常以 $\Phi(z)$ 記这样函数,它在 $[a,b]$ 的外面是正則的,在無穷远点有有限級,在 $[a,b]$ 的上面及下面直到 $[a,b]$ 上是連續的,但端点可能除外,且在端点附近有估計:

$$(469)\qquad |\Phi(z)|\leqslant\frac{A}{|z-c|^{\alpha}},$$

其中 A 及 α 是常数, $0\leqslant\alpha<1$ 及 c 是端点之一,亦即 $c=a$ 或 $c=b$。用 $\Phi^+(\xi)$ 及 $\Phi^-(\xi)$ 記 $\Phi(z)$ 在 $[a,b]$ 上从上面及下面所取的極限值。

問題1 求$\Phi(z)$使当$a<\xi<b$时有关系式：

$$\Phi^{+}(\xi)-\Phi^{-}(\xi)=f(\xi),$$

其中$f(\xi)$是在閉綫段$[a, b]$上滿足李普希茲条件的已知函数。

如同[57]中一样，公式：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+P(z) \tag{470}$$

給出問題的解，其中$P(z)$是任意多項式。条件(469)可直接地根据这样事实来檢驗，即在端点附近$\Phi(z)$有形式[**III**$_2$; **27**]：

$$\Phi(z)=\pm\frac{f(c)}{2\pi i}\lg\frac{1}{z-c}+F(z),$$

其中$F(z)$当$z\to c$时有有限極限。可以証明，公式(470)給出問題的一切解。我們拟証这个事情。設$\Phi_1(z)$及$\Phi_2(z)$是問題的兩个解。只須證明差$\omega(z)=\Phi_2(z)-\Phi_1(z)$是多項式。也像[57]中一样，这差在全平面上是正則的，但端点$z=a$及$z=b$可能除外，且在無穷远点有有限級。剩下来要証的是$\omega(z)$在$z=a$及$z=b$二点也是正則的。

我們注意$\omega(z)$在$z=c$点附近有估計(469)。容易証明，当具有这样估計时$\omega(z)$在点$z=c$也是正則的。为了驗証这个事实，只須重复在[**III**$_2$; **10**]中的定理的証明：若$f(z)$在点$z=a$的鄰域內是單值正則的且按模有界的，則它在点$z=a$本身也是正則的。这时有界条件$|f(z)|\leqslant N$可以換成条件(469)，亦即$|f(z)|\leqslant\frac{C}{\rho^{\alpha}}$ $(0\leqslant\alpha<1)$对于証明沒有什么損害。

問題1滿足条件$\Phi(\infty)=0$的解是在(470)中令$P(z)\equiv 0$获得的。

下面的問題考慮为当$g(\xi)=-1$时的特殊情况。

問題2 求函数$\Phi(z)$使当$a<\xi<b$时有关系式：

$$\Phi^{+}(\xi)+\Phi^{-}(\xi)=0。\tag{471}$$

要注意的是，当 z 环繞 c 点一周时 $\sqrt{z-c}$ 变号，我們可写出問題 2 的下面的解：

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \tag{472}$$

其中根式的值是随意取定的。这个解在全平面上不等于零且 $\Phi(\infty)=0$。

問題的解也可是：

$$\Phi(z)=\frac{P(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \tag{473}$$

其中 $P(z)$ 是任意多項式。这公式給出問題的一切解。事实上，若 $\Phi(z)$ 是問題的任何解，则类似于在問題 1 中所作的一样，不难証明比式 $\Phi(z):\Phi_0(z)$ 是多項式，从而得到(473)。

問題 3 求 $\Phi(z)$ 使当 $a<\xi<b$ 时有关系式：

$$\Phi^+(\xi)+\Phi^-(\xi)=f(\xi), \tag{474}$$

其中 $f(\xi)$ 是在閉綫段 $[a, b]$ 上滿足李普希茲条件的已知函数。

注意到 $\Phi_0(z)$ 滿足条件(471)，我們可將条件(474)写作形式：

$$\frac{\Phi^+(\xi)}{\Phi_0^+(\xi)}-\frac{\Phi^-(\xi)}{\Phi_0^-(\xi)}=\frac{f(\xi)}{\Phi_0^+(\xi)}, \tag{475}$$

亦即我們有对于函数 $\Phi(z):\Phi_0(z)$ 的問題 1。

我們这样来确定公式(472)中根式的值，比方說 $\Phi_0(z)$ 在 $z=\infty$ 点鄰域內的展开式从 z^{-1} 开始。这时在截段 $[a, b]$ 的上岸根式 $\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}$ 是 i 有正系数的純虛数。如果認为这根式的值是这样的，則条件(475)可表达为如下形式：

$$\frac{\Phi^+(\xi)}{\Phi_0^+(\xi)}-\frac{\Phi^-(\xi)}{\Phi_0^-(\xi)}=f(\xi)\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}。 \tag{476}$$

我們証明，函数

$$\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)} \tag{477}$$

在閉綫段$[a, b]$上滿足指数等于二分之一的李普希茲条件。为了这个証明，利用显明的不等式

$$(478)\qquad \sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha}\leqslant\sqrt{|\beta|}\text{，当 }\alpha\geqslant 0,\ \alpha+\beta\geqslant 0。$$

設ξ及η屬于$[a, b]$。令

$$\alpha=(\eta-a)(b-\eta);\quad \alpha+\beta=(\xi-a)(b-\xi),$$

从(478)获得：

$$\begin{aligned}&\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}-\sqrt{(\eta-a)(a-\eta)}\leqslant\\ &\leqslant\sqrt{|(a+b)\xi-\xi^2-(a+b)\eta+\eta^2|}=\\ &=\sqrt{|[(a+b)-(\xi+\eta)](\xi-\eta)|},\end{aligned}$$

从而，注意于$\xi+\eta\geqslant 2a$，將有：

$$\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}-\sqrt{(\eta-a)(b-\eta)}\leqslant\sqrt{b-a}\sqrt{|\eta-\xi|}。$$

完全类似地可証：

$$\sqrt{(\eta-a)(b-\eta)}-\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\leqslant\sqrt{b-a}\sqrt{|\eta-\xi|},$$

亦卽

$$\left|\sqrt{(\eta-a)(b-\eta)}-\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right|\leqslant\sqrt{b-a}\sqrt{|\eta-\xi|},$$

从而看出函数(477)在綫段$[a, b]$上滿足指数$\alpha=\frac{1}{2}$的李普希茲条件。因之，公式(476)的右端的全部也滿足李普希茲条件[III_2;27]。对于函数$\Phi(z)$：$\Phi_0(z)$來解具有边界条件(476)的問題1，我們得到：

$$(479)\quad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i\sqrt{(z-a)(b-z)}}\int_a^b\frac{f(\tau)\sqrt{(\tau-a)(b-\tau)}}{\tau-z}d\tau+\\ +\frac{P(z)}{\sqrt{(z-a)(b-z)}},$$

其中$P(z)$照例是任意多項式。应用柯西积分在綫段的端点附近的估計，容易檢驗函数(479)滿足条件(469)。如果我們要求获得滿足条件$\Phi(\infty)=0$的解，則应在公式(479)中令$P(z)$等于常数：

$$(480)\quad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i\sqrt{(z-a)(z-b)}}\int_a^b\frac{f(\tau)\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}{\tau-z}d\tau+ \\ +\frac{C}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}。$$

在解問題3时可以規定 $\Phi(z)$ 在綫段的端点的鄰域內是有界的附加条件。这时代替問題2的解(472)我們应取：

$$(481)\qquad \Phi_0(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)},$$

且代替公式(479)获得：

$$(482)\quad \Phi(z)=\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}(\tau-z)}d\tau+ \\ +P(z)\sqrt{(z-a)(z-b)}。$$

为了要获得滿足条件 $\Phi(\infty)=0$ 的解，我們应令 $P(z)\equiv0$，且此外应滿足下条件：

$$(483)\qquad \int_a^b\frac{f(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}d\tau=0。$$

若有界性只規定在端点 $z=a$，則代替(481)应取：

$$\Phi_0(z)=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

且代替公式(482)获得：

$$(484)\quad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}\int_a^b\sqrt{\frac{\tau-b}{\tau-a}}\cdot\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau+ \\ +P(z)\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}。$$

在这情况，对于任何 $f(\xi)$ 我們有滿足条件 $\Phi(\infty)=0$ 的唯一解：

$$(485)\quad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}\int_a^b\sqrt{\frac{\tau-b}{\tau-a}}\,\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau。$$

我們不停留在公式(482)及(484)的証明上。它可在前面提过的 Н. И. 穆斯黑利施維里的書中找到，在前面几段的叙述中已經

这样引用过了。

60. 柯西型积分的反演 現在考察积分：

$$\frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = f(\xi), \quad (a<\xi<b) \tag{486}$$

的反演問題。

如在[57]中一样来做。引入函数：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,$$

它滿足条件 $\Phi(\infty)=0$，得到：

$$\varphi(\xi)=\Phi^+(\xi)-\Phi^-(\xi), \tag{487}$$

$$\Phi^+(\xi)+\Phi^-(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\,。 \tag{488}$$

这样一来，方程(486)与下式等价：

$$\Phi^+(\xi)+\Phi^-(\xi)=f(\xi), \quad (a<\xi<b)。 \tag{489}$$

这就是[59]中有附加条件 $\Phi(\infty)=0$ 的問題3。作出这个問題的解，由公式(487)获得 $\varphi(\xi)$。利用公式(480)及对于柯西型积分的边界公式，最后获得：

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\pi i\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}\int_a^b \frac{f(\tau)\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}{\tau-\xi}d\tau+ \\ +\frac{C}{\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}。 \tag{490}$$

我們指出，这函数在閉区間 $[a,\ b]$ 上不滿足李普希茲条件，而只在含于 $[a,\ b]$ 的內部的任何閉区間上滿足这条件，且当 ξ 趋近于 a 或 b 时可無限增大。如果条件(483)滿足，則获得方程(486)在兩端点都是有界的解：

$$\varphi(\xi)=\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}\int_a^b \frac{f(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}(\tau-\xi)}\,d\tau。 \tag{491}$$

所考慮的反演問題的詳細叙述在前面提过的 Н. И. 穆斯黑利施維里書中可找到。

第二章 变分学

61. 問題的提出 我們考察某些实际問題来闡明变分学的对象。設有不均匀的各向同性的介質，在其中的每一点(x,y,z)确定了速度$v(x,y,z)$，它不依賴于方向。我們来計算以上面所指的速度移动的点描繪某曲綫l所需要的时間。行过路程元素ds所需的时間是ds/v，而行过全程l所需要的时間可表达为积分：

$$T=\int_l \frac{ds}{v(x,y,z)}。 \tag{1}$$

固定曲綫l的兩端点(x_0, y_0, z_0)及(x_1, y_1, z_1)，而曲綫本身是可以改变的。这时时間T的値將随l而改变。这时就說，T是曲綫l的泛函。当l选定时泛函T將有确定的数値。几何光学中有下面这样一个問題：当端点(x_0, y_0, z_0)及(x_1, y_1, z_1)固定时，确定l使泛函T有最小値。設在曲綫l的方程中我們用x作为参数，而y及z都看作x的函数。这时积分(1)写作如下形式：

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x,y,z)}\,dx, \tag{2}$$

其中y'及z'是函数y及z的导数。問題归結到寻求这样的函数$y(x)$及$z(x)$，使(2)有最小値，并应使待求函数滿足下面的边界条件：

$$y(x_0)=y_0;\quad z(x_0)=z_0;$$
$$y(x_1)=y_1;\quad z(x_1)=z_1。$$

在平面的情况泛函(2)的形式是：

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\,dx, \tag{2_1}$$

因而問題归結到求一个函数 $y(x)$，滿足兩个边界条件：

$$y(x_0)=y_0;\ y(x_1)=y_1。$$

現在考察多重积分的極值問題。在空間內給定閉曲綫 l，需要在这曲綫上張这样的曲面，使它有最小面积。設 λ 是 l 在平面 (x, y) 上的射影，且 B 是 λ 所圍成的区域。把待求的曲面的方程表为显式 $z=z(x, y)$。这时曲面的面积可表达为积分

$$S=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy, \tag{3}$$

其中 z_x 及 z_y 是 $z(x, y)$ 对 x 及 y 的偏导数。

当曲面選定时，量 S 將有确定的值，因而此处有曲面的泛函。問題归結到选擇这样函数 $z(x, y)$，使 S 有最小值。这时的边界条件是給定待求函数在境界 λ 上的值。这些值应給出要張曲面的那个閉曲綫 l 上点的 z 坐标。

变分学的基本問題是求曲綫及曲面的泛函的最大值及最小值，而这些泛函是由一些定积分来表达的。这和微分学中求某函数的最大値及最小値的問題是类似的。如大家所知道的，这后面的問題与求函数的極值問題有直接联系，也就是求自变量这样的值，它使函数与它的充分鄰近的一切值比較取最大值或最小值。同样我們也可考虑泛函的这种問題。例如，在泛函(2)的情况，我們將求这样的曲綫 l，使这条曲綫的 T 值不大于和它充分鄰近的一切曲綫的 T 值。若泛函在某曲綫或曲面上的值不小于(或不大于)与它充分鄰近的一切曲綫或曲面上的值，則簡單地說，泛函在这曲綫或曲面上有極值。

后面我們將把問題正确地提出，且确定曲綫及曲面的接近度的概念，这里的曲綫及曲面起着尋常微分学中自变量的作用。我們知道，为了求这样的値 x，它使函数 $f(x)$ 达到極值，我們必須解方程 $f'(x)=0$。我們將証明，在变分学中，要曲綫 $y=y(x)$ 或曲面

$z=z(x, y)$ 給出某泛函的極值，它应滿足某些微分方程。我們首要的問題是这些微分方程的建立。滿足这些微分方程乃是泛函有極值的必要条件，这与等式 $f'(x)=0$ 是已知函数 $f(x)$ 在某些值 x 有極值的必要条件完全一样的。为了要导出提到的那些微分方程，需要兩个引理，我們將在下一段中叙述。

62. 基本引理 引理一 設函数 $\eta(x)$ 本身和它的导数在区間 $[x_0, x_1]$ 内都是連續的，且在端点等于零 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$。那末，如果对于任何这样的函数 $\eta(x)$，下积分

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx$$

总等于零，其中 $f(x)$ 是区間 $[x_0, x_1]$ 内的一个固定連續函数，則 $f(x)$ 在区間 $[x_0, x_1]$ 内恒等于零。

用反証法。設在区間里面的某点 $x=\xi$ 处 $f(x)$ 不等于零。例如，$f(\xi)>0$。由于 $f(x)$ 的連續性，它在落在 $[x_0, x_1]$ 里面且包含 ξ 点的某区間 $[\xi_1, \xi_2]$ 内也是正的。現在定义函数 $\eta(x)$ 如下：

$$(5)\qquad \eta(x)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x_0\leqslant x\leqslant \xi_1; \\ (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2, & \text{当 } \xi_1\leqslant x\leqslant \xi_2; \\ 0, & \text{当 } \xi_2\leqslant x\leqslant x_1。\end{cases}$$

这样構成的函数 $\eta(x)$ 滿足引理中的一切条件。事实上，由于 $\eta(x)$ 的構造，$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$。当 $x=\xi_1$ 及 $x=\xi_2$ 时，乘积 $(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2$ 和它对 x 的导数都变为零。在区間 $[\xi_1, \xi_2]$ 的外面 $\eta(x)$ 是恒等于零的。从而显出这函数和它的导数在整个区間 $[x_0, x_1]$ 内的連續性。应注意的是，在 $[\xi_1, \xi_2]$ 的外面 $\eta(x)$ 是恒等于零的，則积分(4)可写作如下形式：

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2dx,$$

因为积分号下函数是連續的且在积分区間里面是正的，从而看出

这个积分有正值。但由引理的条件它应等于零。这矛盾証明了引理。

現在来講对于二重积分的类似引理。

引理二　設函数 $\eta(x, y)$ 本身和它的一阶偏导数在区域 B 内都是連續的，且在区域 B 的境界 l 上 $\eta(x, y)$ 等于零。那末，如果对于任何这样的函数 $\eta(x,y)$，下面积分

$$\iint_B f(x, y)\eta(x, y)dx\ dy \tag{6}$$

总等于零，其中 $f(x, y)$ 是在区域 B 内一个固定連續函数，則 $f(x, y)$ 在区域 B 内恒等于零。

設在 B 的里面某点 (ξ, η) 函数 $f(x, y)$ 是正的。于是它在以 (ξ, η) 作心且半徑为 ρ 的某圓内是正的，且設这圓落在区域 B 内。定义 $\eta(x, y)$ 如下方式：

$$\eta(x,y)=\begin{cases}0, & 当 (x-\xi)^2+(y-\eta)^2\geqslant\rho^2;\\ [(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-\rho^2]^2, & 当 (x-\xi)^2+(y-\eta)^2<\rho^2。\end{cases}$$

不难驗証 $\eta(x, y)$ 滿足引理中一切条件，而积分(6)归結到連續正函数在所說圓上的积分，因而积分值是正的，这与引理的条件矛盾。

应注意的是，若我們对函数 η 加上更多的限制，比方說要求它有直到 n 阶的連續导数，兩个引理仍都保持正确。上面的証明也保持有效。例如，只須把公式(5)中的指数 2 改为 $(n+1)$ 或 $(n+2)$ 就行。我們还要指出，对于三重积分以及一般的任何重积分，引理也很容易証得。

63. 最簡單情况的尤拉方程　考察最簡單的泛函：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx, \tag{7}$$

其中 F 是所有三个变元 x, y, y' 的連續函数。我們假設 F 和它的

直到二阶导数在平面(x, y)的某区域B内以及对任何值y'是連續的。

若我們固定了函数$y=y(x)$［或者說固定了曲綫$y=y(x)$也一样，并且，我們經常認为这曲綫是屬于上述区域B內的］，則泛函J获得确定的数值。

設函数$y(x)$在积分区間端点的值已知是：

(8)　$$y(x_0)=y_0;\ y(x_1)=y_1.$$

我們將設待求函数有連續导数。有連續导数的这样函数类叫做C_1类（相应的有n阶連續导数的函数类將記作C_n），且以后我們所說到的一切函数將認作是屬于C_1类的。我們称曲綫$y=y(x)$的ε-鄰域是适合下面这种条件的一切可能的曲綫$y_1(x)$：它在整个区間$[x_0, x_1]$內滿足不等式$|y_1(x)-y(x)|\leqslant\varepsilon$。有时候，除这个不等式外，还添上一个不等式：$|y_1'(x)-y'(x)|\leqslant\varepsilon$，亦即不仅要求縱标有$\varepsilon$-接近度并且要求切綫的角系数也是这样。有时我們把第一种情况下的接近度称作零級ε-接近度，而把存在兩个不等式的第二种情况下的接近度称作一級ε-接近度。

定义　我們將謂泛函J在上述区域B內屬于C_1类且滿足条件(8)的曲綫$y(x)$上取相对極值，如果这泛函在$y(x)$上的值不小于(或不大于)它在C_1类中其他任何曲綫上的值，只要这些曲綫与$y(x)$有某ε-接近度且滿足条件(8)。

这相对極值的概念完全与函数的極大及極小的概念［I;58］类似。与相对極值同时也可引出絕对極值的概念。設有某D类的函数$y(x)$，对于它們积分(7)有意义。我們將謂泛函J在D类中的曲綫$y(x)$上取絕对極值，如果这泛函在$y(x)$上的值不小于(或不大于)它在D类中其他一切曲綫上的值。

目前我們將只討論相对極值，而只在这章的末尾才簡略講到絕对極值的問題。为了言詞簡短起見，相对極值將簡称作極值。

在下段中我們將討論不同于泛函(7)的泛函。对于那样的泛函也可能有相对極值或絕对極值的問題。我們只講相对極值而且以后不再每一次都这样声明。

我們將导出J有極值时$y(x)$所应满足的必要条件。选擇任何函数$\eta(x)$，它在积分区間的兩端点等于零，且除了使泛函J取極值的那个$y(x)$外再作新函数$y(x)+\alpha\eta(x)$，其中α是数值很小的参数。这个新函数也满足与$y(x)$一样的边界条件。將它代入泛函J，积分的結果，得到参数α的某函数：

$$(9)\qquad J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y(x)+\alpha\eta(x),\ y'(x)+\alpha\eta'(x))dx。$$

当任給正数ε，对充分接近于零的一切值α函数$y(x)+\alpha\eta(x)$与曲綫$y(x)$有ε-接近度（甚至是一級ε-接近度）。因之，如果$y(x)$給泛函J以極值，則函数(9)当$\alpha=0$时应有極值，因而它的导数在$\alpha=0$时应当等于零。在积分号下微分且用加下标的办法来記导数，將有：

$$J'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,\ y,\ y')\eta(x)+F_{y'}(x,\ y,\ y')\eta'(x)]dx。$$

用分部积分法进行积分，可写作：

$$(10)\qquad J'(0)=\Big[F_{y'}\eta(x)\Big]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\Big[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\Big]dx。$$

按$\eta(x)$在区間的端点等于零的条件，所以积分号外面的項等于零，因之有：

$$J'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\Big[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\Big]dx=0。$$

注意引理，我們可以斷言，給出积分(7)以極值的曲綫$y(x)$应满足下面的微分方程：

$$(11)\qquad F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0。$$

把全导数 $\frac{d}{dx}F_{y'}$ 展开，就可以把这方程写作以下形式：

$$F_{y'y'}y''+F_{yy'}y'+F_{xy'}-F_y=0, \tag{12}$$

其中，例如 $F_{xy'}$ 是对于 x 及 y' 的二阶偏导数。这方程是尤拉發現的，通常称作尤拉方程。它是二阶微分方程，且它的通解含有兩个任意常数，这兩个常数应当由兩个边界条件(8)来确定。

乘积 $J'(0)\alpha$ 是函数 $J(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 时的微分，通常称作泛函(7)的一次变分且記作 δJ。如果注意到(10)，可写：

$$\delta J=J'(0)\alpha=\Big[F_{y'}\delta y\Big]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\Big(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\Big)\delta y\ dx, \tag{13}$$

$$(\delta y=\alpha\eta(x))。$$

我們看出，在导出方程(11)时我們曾应用到二阶导数 $y''(x)$，因此，严格地說，在建立極值的必要条件时，我們假設 $y(x)$ 是屬于 C_2 类的函数，也就是它有直到二阶的連續导数。

把引理作适当改变后，可以証明，对于有連續导数且在 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 时等于零的任何 $\eta(x)$，若在 C_1 中的 $y(x)$ 滿足条件：

$$J'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y\eta(x)+F_{y'}\eta'(x)]dx=0,$$

并且沿着曲綫 $y=y(x)$ 上有 $F_{y'y'}\neq 0$，則 $y(x)$ 屬于 C_2，因而也应当滿足方程(11)。

64. 多个函数及高阶导数的情况 当泛函依賴于多个函数的情况，例如，像泛函(2)的情况，也不难写出尤拉方程。

我們只講兩个函数的情况：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y',\ z,\ z')dx。 \tag{14}$$

作鄰近于 $y(x)$ 及 $z(x)$ 的兩个函数：

$$y(x)+\alpha\eta(x);$$

$$z(x)+\alpha_1\eta_1(x),$$

其中 $\eta(x)$ 及 $\eta_1(x)$ 都是任意函数，在区間的端点都等于零。將它們代入积分(14)，我們得到 α 及 α_1 的函数 $J(\alpha,\alpha_1)$，且为了要 $y(x)$ 及 $z(x)$ 給泛函(14)以極值，必須 $J(\alpha, \alpha_1)$ 对于 α 及 α_1 的偏导数在 $\alpha=\alpha_1=0$ 时都等于零。完全和前面相类似，进行計算之后，我們就得到这兩个偏导数的表达式：

$$(15)\qquad \begin{cases} J_\alpha(0, 0)=[F_{y'}\eta]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx, \\ J_{\alpha_1}(0, 0)=[F_{z'}\eta_1]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta_1(x)\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)dx, \end{cases}$$

且因为积分外面的項都变为零，則和上面一样，我們确信，要函数 $y(x)$ 及 $z(x)$ 給泛函(14)以極值，它們必須满足下面的含兩个二阶方程的方程組：

$$(16)\qquad F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0;\ F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0。$$

除了这些方程以外，还有边界条件：

$$y(x_0)=y_0;\ y(x_1)=y_1;\ z(x_0)=z_0;\ z(x_1)=z_1,$$

这表示待求空間曲綫的端点是固定的。

由于(15)，积分(14)的变分可表为下式：

$$(17)\quad \delta J=J_\alpha(0, 0)\alpha+J_{\alpha_1}(0, 0)\alpha_1= \\ =[F_{y'}\delta y+F_{z'}\delta z]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y+\right. \\ \left.+\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)\delta z\right]dx,\qquad (\delta y=\alpha\eta(x);\ \delta z=\alpha_1\eta_1(x))。$$

对于依賴于 n 个函数：$y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 的泛函：

$$(18)\qquad J=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \cdots, y_n, y_n')dx,$$

有極值的必要条件可表达为 n 个二阶方程的方程組：

$$(19)\qquad F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y_k'}=0,\ (k=1, 2, \cdots, n),$$

而端点为固定的边界条件则有下面形式：

$$y_k(x_0)=y_k^{(0)};\ y_k(x_1)=y_k^{(1)},\ (k=1,2,\cdots,n)。$$

泛函(18)的一次变分有形式：

$$(20)\quad \delta J=\sum_{k=1}^{n}J_{\alpha_k}(0,0,\cdots,0)\alpha_k=$$

$$=\Big[\sum_{k=1}^{n}F_{y_k'}\delta y_k\Big]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\sum_{k=1}^{n}\Big(F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y_k'}\Big)\delta y_k dx,$$

$$(\delta y_k=\alpha_k\eta_k(x))。$$

现在討論积分含有待求函数的高阶导数的情況：

$$(21)\qquad J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})dx。$$

和上面一样，我們建立鄰近曲綫 $y(x)+\alpha\eta(x)$，代入(21)的积分中，对 α 微分且令 $\alpha=0$。这样一来我們得：

$$(22)\qquad J'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y\eta(x)+F_{y'}\eta'(x)+\cdots+F_{y^{(n)}}\eta^{(n)}(x)]dx。$$

用若干次分部积分法之后，就把除第一項以外的右端各項的形狀改变：

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y^{(k)}}\eta^{(k)}(x)dx=\Big[F_{y^{(k)}}\eta^{(k-1)}(x)-\frac{d}{dx}F_{y^{(k)}}\eta^{(k-2)}(x)+\cdots+$$

$$(23)\qquad +(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}F_{y^{(k)}}\eta(x)\Big]_{x_0}^{x_1}+$$

$$+(-1)^k\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^k}{dx^k}F_{y^{(k)}}\eta(x)dx。$$

我們假定 $\eta(x)$ 及它的到 $(n-1)$阶导数在端点都等于零。由于这样则积分号外面的項都消失了，把 $J'(0)$ 等于零，得到条件：

$$J'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\Big[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\Big]dx=0,$$

由于基本引理，我們导得下面的尤拉方程：

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0。\tag{24}$$

这是 $2n$ 阶微分方程。它的通积分含有 $2n$ 个任意常数，因而应当还有 $2n$ 个边界条件。在最簡單的情况，这些条件归結到函数和它的直到 $(n-1)$ 阶导数在区間的端点的值是已知的。从这些边界条件也可推出 $\eta(x)$ 的类似值应当等于零。还要指出的是，我們認为在上面公式中所引进的那些函数都是連續的，例如，我們認为待求函数 $y(x)$ 屬于 C_{2n} 类，也就是它本身以及到 $2n$ 阶导数都是連續的。

65. 重积分的情况 奥斯特洛格拉德斯基方程 現在导出重积分有極值的必要条件。这条件首先是由 M. B. 奥斯特洛格拉德斯基在它的論文"关于等周問題的微分方程"指出的，这篇論文刊載在彼得堡科学院記录，第四卷，第五期，1850 年。

考察二重积分：

$$J=\iint_B F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)\,dx\,dy,\tag{25}$$

其中用 u_x 及 u_y 記函数 $u(x,\ y)$ 的偏导数。求这样的一个函数 $u(x,y)$，$u(x,y)$ 本身和它的直到二阶导数在区域 B 內都是連續的，在这区域的境界 l 上它的值是已知的，且它給泛函 (25) 以極值。作鄰近函数 $u(x,\ y)+\alpha\eta(x,\ y)$，其中 $\eta(x,\ y)$ 是在 l 上等于零的任意函数。把这函数代入 (25) 的积分中，对 α 微分且令 $\alpha=0$，我們得着泛函的一次变分的下面表达式：

$$\delta J=J'_\alpha(0)\alpha=\alpha\iint_B(F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)\,dx\,dy。$$

应用著名的格林公式：

$$\iint_B\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_l P\,dx+Q\,dy,$$

把一次变分式的最后兩項变形如下：

$$\iint_B (F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\,dx\,dy = \iint_B \Big[\frac{\partial}{\partial x}(\eta F_{u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta F_{u_y})\Big]dx\,dy -$$

$$- \iint_B \eta\Big(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\Big)dx\,dy =$$

$$= \int_l \eta F_{u_x}dy - \eta F_{u_y}dx - \iint_B \eta\Big(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\Big)dx\,dy。$$

这样一来，我們有一次变分的下面表达式：

$$\delta J = \int_l \delta u(F_{u_x}dy - F_{u_y}dx) +$$
$$+ \iint_B \Big(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\Big)\delta u\,dx\,dy, (\delta u = \alpha\eta(x, y))。 \tag{26}$$

对于極値必須要这一次变分为零，又注意到 $\eta(x, y)$ 在 l 上等于零，我們可肯定在(26)式右端的重积分应等于零，从而由于基本引理，我們就得到給泛函(25)以極値的待求函数 $u(x, y)$ 应满足下面奥斯特洛格拉德斯基方程：

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0, \tag{27}$$

或它的展开形式：

$$F_{u_xu_x}u_{xx} + 2F_{u_xu_y}u_{xy} + F_{u_yu_y}u_{yy} + F_{u_xu}u_x +$$
$$+ F_{u_yu}u_y + F_{xu_x} + F_{yu_y} - F_u = 0。 \tag{28}$$

我們得到 $u(x, y)$ 在区域的内部应該满足的二阶偏微分方程。至于它的边界条件是 u 在境界 l 上取已知値，这是前面已經提到过的。

在依賴于几个函数的重积分的情况，我們有这种方程的方程組。在三重积分的情况且函数 $u(x, y, z)$ 依賴于三个自变数，得到下面形式的方程：

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} - \frac{\partial}{\partial z}F_{u_z} = 0。 \tag{29}$$

若积分号下有函数$u(x, y)$的直到n阶的导数，则奥斯特洛格拉德斯基方程有如下形式：

$$(30)\quad \begin{aligned} &F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\\ &+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}-\cdots+(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}F_{u_{yy\cdots y}}=0。\end{aligned}$$

在前面的一切討論中，我們总認为在所有公式中引入的一切函数都是連續的。此外，在推导公式(26)时我們認为可以采用將二重积分变为曲綫积分的公式，而这是和偏导数u_x及u_y在区域B的境界l的附近的性質有关的。在討論絕对極值問題的时候我們还要再講这个問題。

还要指出，满足方程(24)或(27)的函数，或更准确的講，与它們相应的几何形象，通常称作問題的極帶。單积分的極帶是曲綫，而二重积分的極帶是曲面。因为尤拉及奥斯特洛格拉德斯基方程仅仅是相应泛函有極值的必要条件，显然我們不能肯定任何極帶与它充分鄰近的曲綫或曲面比較都会給出泛函的極值。

66．关于尤拉方程及奥斯特洛格拉德斯基方程的几点注意

先考察最簡單情况的尤拉方程(11)。設函数F不含有y，則方程取如下形式：

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

且有显明的初积分$F_{y'}=C$。若F不含有x，則不难檢驗它有初积分：

$$(31)\quad F-y'F_{y'}=C。$$

事实上：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})&=F_yy'+F_{y'}y''-F_{y'}y''-F_{y'y}y'^2-F_{y'y'}y'y''=\\ &=-y'(F_{y'y'}y''+F_{y'y}y'-F_y)。\end{aligned}$$

既然F不含有x，则$-y'$的乘数是尤拉方程的左端，因之，由于这方程，有：

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0,$$

亦即确实有积分(31)。

若F不含有y'，则尤拉方程(11)是：

$$F_y(x, y)=0,$$

亦即我們沒有微分方程而是普通(有限形式)方程。它給出一条或几条曲綫，而不像微分方程所表示的依賴于兩个参数的曲綫族，因此，一般地說，不能使这一条或几条曲綫所定的函数滿足边界条件。

現在指出当尤拉方程变为恒等式时的情况。令$F=A(x,y)+$ $+B(x, y)y'$，且有恒等式：

$$\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}=0。\tag{32}$$

不难檢驗，这时方程(11)的左端將恒等于零，而(7)中的积分可写作形式：

$$J=\int_l Adx+Bdy,\tag{33}$$

并且由于(32)，它不因积分途徑而变，亦即对于連接兩点(x_0, y_0)及(x_1, y_1)的任何曲綫l它有相同值，而这也就是尤拉方程变为恒等式的先决条件。不难看出，在这情况我們可写：

$$F(x, y, y')=\frac{d}{dx}G(x, y),$$

其中$G(x, y)$是把积分(33)看作具有可变积分上限而确定的。

完全一样，若在积分(21)中积分号下的函数是依賴于$(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$的某函数的对$x$的全导数：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=\frac{d}{dx}G(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

则尤拉方程(24)变为恒等式。

现在考察泛函(25)，且設积分号下的函数有形式：

$$F(x, y, u, u_x, u_y)=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}, \tag{34}$$

其中 A 及 B 都是 (x, y, u) 的某函数。直接代入后可以檢驗，这时，奧斯特洛格拉德斯基方程变为恒等式。实际上，这是因为：由于格林公式，表达式(34)的二重积分等于沿境界的积分

$$\int_l (A dy-B dx),$$

于是这二重积分的值可由函数 u 在区域 B 的境界 l 所取的那些値而完全确定。若固定 u 在境界 l 上的值，則对于任何选擇的函数 u，在区域 B 上的二重积分都有相同的值。

(34)型的表达形式可称作散度型的表达式。我們注意，如果把任何泛函(25)的积分号下的函数加上散度型的表达式，則奧斯特洛格拉德斯基方程显然完全沒有影响，就是說，新泛函与旧泛函有同样的奧斯特洛格拉德斯基方程。这可从(27)中方程的左端是 F 和它的偏导数的綫性齐次形式立即看出。

上面我們已經看出，若积分号下的函数是散度型的，則奧斯特洛格拉德斯基方程变为恒等式。逆断言也可以証明。

若积分号下的函数 F 含有高于一阶的偏导数，則和前面一样，条件(34)是把奧斯特洛格拉德斯基方程(30)变为恒等式的必要且充分的条件。但这时 A 及 B 可能含有与 F 中同阶的偏导数。例如：

$$F=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=(u_x u_{yy})_x-(u_x u_{xy})_y,$$

且不难檢驗这时方程(30)变为恒等式。

67. 例 1. 考察(2_1)中的泛函，令 $v(x, y)=\sqrt{y}$：

$$J=\int_{a}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx. \tag{35}$$

这泛函是由所謂最速落徑問題引出来的：在連接兩已知点(x_0, y_0)及(x_1, y_1)的所有曲綫中，找这样一条曲綫，使一个自由質点用最短时間走过这曲綫的全程。这时，認为y軸的方向是垂直向下的，亦即是重力作用的方向。在泛函(35)中积分号下的函数不含有x，因而可立即写出尤拉方程的初积分：

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{C_1}}$$

或

$$y'^2=\frac{C_1-y}{y}。\tag{36}$$

令

$$y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u),$$

从而

$$y'=\frac{C_1}{2}u'\sin u,$$

代入(36)中且簡化后，求得：

$$\frac{C_1}{2}(1-\cos u)\,du=\pm dx,$$

因之，有：

$$x=\pm\frac{C_1}{2}(u-\sin u)+C_2;\ y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u)。$$

由此可見，泛函(35)的極帶是輪轉綫。常数C_1及C_2是随起点及終点的給定而确定的。若这两点之一是原点，則必須令$C_2=0$，于是当参数u的值等于零时即得原点。这时要注意这个事实，就是所討論的問題具有某奇异性，这就是当$u=0$时，不难檢驗$y'=\frac{dy}{dx}$变为無穷大，且(35)式中积分号下函数的分母变为零。如果在这积分中取u作自变量，那末，当$u=0$时的奇异性就消失了。

2　設在某曲面上的点的位置是由参数坐标(u, v)来确定，且

$$ds^2=E(u, v)du^2+2F(u, v)du\,dv+G(u, v)dv^2$$

是这曲面上的弧長元素的平方[II;130]。

曲面上的曲綫叫作測地綫，如果它是从表达曲綫長度的积分

$$\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du\tag{37}$$

为極小的必要条件而确定的，并且沿这曲綫我們認为 v 是 u 的函数。尤拉方程的形式是：

$$\frac{1}{2}\frac{E_v+2F_vv'+G_vv'^2}{\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}}-\frac{d}{du}\frac{F+Gv'}{\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}}=0。$$

考察中心在原点且半徑等于一的球面：

$$x=\sin\theta\cos\varphi;\ \ y=\sin\theta\sin\varphi;\ \ z=\cos\theta。$$

这时：

$$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

且积分(37)是：

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}\,d\theta,$$

其中 φ' 是 φ 对 θ 的导数。积分号下函数不含有 φ，因之我們有下面的初积分：

$$\frac{\sin^2\theta\,\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}}=C_1。$$

令 $C_1=0$，我們得到显明的解 $\varphi=$常数。换句話說，測地綫是球面的一切子午綫，亦即經过在 $\theta=0$ 及 π 的球的兩極所引的一切大圓。由于極的选擇是任意的，显然球面上的一切大圓都是它的測地綫。

3. 考察空間几何光学的問題：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(y,\ z)}dx=\int_{x_0}^{x_1}n(y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \tag{38}$$

当速度 v 或折射率 $n=1:v$ 不依賴于 x 时的情况。

若我們写出积分(38)的尤拉方程，且解出 y'' 及 z''，則得到方程：

$$ny''=n_y(1+y'^2+z'^2);\ \ nz''=n_z(1+y'^2+z'^2), \tag{39}$$

因而不难檢驗我們有初积分：

$$n=C\sqrt{1+y'^2+z'^2}。 \tag{40}$$

若 n 又不含变量 y，則从方程(39)的第一式給出 $y''=0$，亦即 $y=C_1x+C_2$，因之任何極帶都是平面曲綫，位在平行于 z 軸的平面內。若令 $v=\sqrt{z}$，則得到空間的最速落徑問題，并且 z 軸是沿重力作用的方向。

現在令 $n=1:z$，并且我們只考慮 z 有正値的半空間。將 $n=1:z$ 及 $y=C_1x+C_2$ 代入公式(40)，得着对于函数 z 的可分离变量的一阶方程：

$$\frac{Cz\,dz}{\sqrt{1-(1+C_1^2)C^2z^2}}=dx,$$

从而

$$(x-C_3)^2+C_1^2(x-C_3)^2+z^2=\frac{1}{(1+C_1^2)C^2}.$$

引用新任意常数 $C_4^2=\frac{1}{(1+C_1^2)C^2}$ 来代替 C，又以常数 $C_2'=C_2+C_1C_3$ 来代替 C_2，且由于 $y=C_1x+C_2$，更改

$$C_1^2=\frac{(y-C_2')^2}{(x-C_3)^2}$$

之后，我們就可把上面的公式写如下形式：

$$(x-C_3)^2+(y-C_2')^2+z^2=C_4^2. \tag{41}$$

这样一来，积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{z}dx$$

的極帶將是半圓周，而这些半圓周是中心在平面 $z=0$ 上的球面 (41) 面跟 $z=0$ 平面相正交的平面 $y=C_1x+C_2$ 的交綫。

可以給予所获得的結果以有趣的几何解釋。若在半空間 $z>0$ 內，我們由公式

$$ds=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{z}$$

确定長度元素，亦卽測度，則积分(38) 表示在这測度下的曲綫的長度。由于在积分号下分母含有 z，所以当这曲綫無限地接近于平面 $z=0$ 时曲綫的長度將無限地增大，亦卽对于具有这測度的几何来說这平面就好比是無穷远平面。

前面提到的那些半圓周在这几何中起着直綫的作用。除了那些半圓周以外，与平面 $z=0$ 正交的半直綫在这几何中也都叫做直綫。这些半直綫是提到的半圓周的退化形像。中心在平面 $z=0$ 上的半球面或与平面 $z=0$ 正交的半平面我們叫做平面。当对于这新几何中的点，直綫及平面作了这样定义后，不难驗証寻常欧几里得几何中除了关于平行綫公理以外的一切公理都能实現，亦卽在半空間 $z>0$ 內我們簡單地实現了罗巴切夫斯基几何。我們要注意，在与平面 $z=0$ 正交的直綫的情况，我們不能用 x 为自变量。为了不受所选自变量的限制，我們应求出極帶方程的参数形式：$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$。这时前面指出的积分写作以下形式：

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}}{z}dt\text{。}$$

以后我們將在已知曲綫是参数形式的情况下来討論变分学的基本問題。当用这种参数形式給出时，前面所指的半直綫也是积分 J 的極帶。

在平面的情况积分的形式是：

$$J=\int_{M_0}^{M_1}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx,$$

且極帶將是中心在 x 軸上的圓周或与这軸正交的直綫。在半平面 $y>0$ 內所指的半圓周及半直綫起着直綫的作用，且在提到的半平面內实現了罗巴切夫斯基平面几何。特別是，經过所指半平面的任何兩点 M_0 及 M_1 只能引出一条且仅一条極帶。

4．在連接 XY 平面上兩点 M_0 及 M_1 的所有曲綫中，要找这样一条曲綫，使它繞 OX 軸旋轉所成的曲面有最小面积。旋轉曲面的面积可表为下积分[I;106]：

$$S=2\pi\int_{M_0}^{M_1}y\sqrt{dx^2+dy^2}=2\pi\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

不計常数因子 2π，我們把問題归結为关于积分：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

的極值問題。

在这情况积分号下的函数不含有 x，我們可写出尤拉方程的初积分(31)：

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

从而

$$\frac{C_1dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}=dx\text{。}$$

积分后，我們求得：

$$x-C_2=C_1\lg(y+\sqrt{y^2-C_1^2})-C_1\lg C_1$$

或

$$y+\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1e^{\frac{x-C_2}{C_1}},$$

于是，最后有：

$$y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x-C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}\right)=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}。$$

这样，極帶是具有平行于 OY 軸的对称軸的悬鏈綫[I;178]。可以証明，在所考虑的問題中，經过兩已知点 M_0 及 M_1 不是总能引出一条唯一的極帶。随着这兩点的位置，这样的極帶可以是兩条，一条或根本沒有。

前面我們已經見过，在球面上的測地綫是在这球面上的大圓周。若球面上兩点 M_0 及 M_1 不是球的同一直徑的兩端，就能够以在一个且仅在一个大圓周上的兩弧將它們連接起来。若 M_0 及 M_1 兩点位于同一直徑的兩端，就能够用球面的無穷个大圓的半圓周將它們連接起来。

尤拉方程只是相应的泛函有極值的必要条件，因此我們不能肯定所求得的極帶确实会給相应泛函以極值。以后我們也將指出某些充分条件。在球面上測地綫的情况，距离的極小值將是連接 M_0 及 M_1 兩点的大圓周上兩弧中的較小弧。曲面上連接 M_0 及 M_1 兩点的任何曲綫不能給出 M_0 及 M_1 兩点間最大距离。显然，在曲面上可以引出連接 M_0 及 M_1 兩点且任意接近所取曲綫的曲綫，使它的長度大于所取曲綫的長度。

5. 考虑积分

$$J=\iint_B\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy$$

的極值問題。

前面已經見过[61]，这問題是由寻求張在已知境界上有最小面积的曲面問題引出来的。如果在已知境界上張一任何曲面，則十分显然地，我們可以作出与它任意接近的曲面，張在同一境界上且有較大的面积，因此，在这里积分的極值只是它的最小值。將积分号下的表达式代到方程(27)中，我們得到对于待求的極小曲面的下面的二阶微分方程：

$$r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)=0, \tag{42}$$

$$(p=u_x;\ q=u_y;\ r=u_{xx};\ s=u_{xy};\ t=u_{yy})。$$

我們回忆，曲面上的平均曲率确定如下公式[II;134]：

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}, \tag{43}$$

其中 $E, F, \cdots, M, N$ 是高斯第一及第二微分形式的系数。在曲面方程是显式的情况我們有[II;131]：

$$E=1+p^2;\ F=pq;\ G=1+q^2;$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

因而方程 (42) 表示的事实是，在最小曲面上，一切点的平均曲率应等于零。这結果以前[II;139]借助于曲面的面积元素的变值已經得到过了。

方程(42)是具有两个自变量的二阶偏微分方程，它在某些方面与拉普拉斯方程类似。我們証明，利用复变量的解析函数可获得方程(42)的解，正像以前 [III_2; 2] 用复变量的解析函数获得拉普拉斯方程的解一样。从公式(43)立即推知，如果对于曲面实現了条件：$E=G=M=0$，則我們得到 $H=0$。設 r 是曲面上以 (x, y, z) 为分量的向量半徑。上面的条件可写为下面形式[II;130]：

$$r_u'^2=r_v'^2=r_{uv}''\cdot m=0,$$

其中 m 是曲面的單位法綫向量。如果使 r 服从下面的条件：

$$r_u'^2=0;\quad r_v'^2=0;\quad r_{uv}''=0,$$

則这些条件一定会滿足。

从写出的等式中的前面两个是純量等式，而第三个是向量等式。它們的展开形式可写作如下形式：

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=0;\quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=0; \tag{44}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0。 \tag{45}$$

如果坐标 x, y, z 对于 u 及 v 的偏导数都是实値，等式 (44) 显然不能实現。我們設坐标都是复变量 u 及 v 的解析函数。等式(45)显示出，(x, y, z) 应表达为仅是 u 的函数及仅是 v 的函数之和的形式[II;164]：

$$x=\varphi_1(u)+\psi_1(v);\quad y=\varphi_2(u)+\psi_2(v);\quad z=\varphi_3(u)+\psi_3(v), \tag{46}$$

并且，由于(44)，我們应有：

$$\sum_{s=1}^{3}\varphi_s'^2(u)=0;\quad \sum_{s=1}^{3}\psi_s'^2(v)=0。$$

令 $u=\rho+\sigma i$。为了要有实曲面，我們假定 $\psi_s(v)$ 的値与 $\varphi_s(u)$ 的値互为复素共軛的。更确切的說，我們將認为 $v=\rho-\sigma i$，且函数 $\psi_s(v)$ 在关于实軸为对称的点处有 $\varphi_s(u)$ 的复共軛値。这时公式(46)取如下形式：

$$x=2R\varphi_1(u);\quad y=2R\varphi_2(u);\quad z=2R\varphi_3(u),$$

其中 R 是实部記号。把因子 2 并到实部記号及函数关系之內，我們可將公式写作如下形式：

$$x=R\varphi_1(u);\quad y=R\varphi_2(u);\quad z=R\varphi_3(u), \tag{47}$$

其中解析函数 $\varphi_s(u)$ 应服从下面条件:

$$\sum_{s=1}^{3}\varphi_s'^2(u)=0。 \tag{48}$$

在参数表示式(47)中 ρ 及 σ（亦即复变量 u 的实部及虚部）起着实参数的作用。我們可用函数 $\varphi_s(u)$中的一个作为独立复变量。例如，可令 $t=\varphi_3(u)$ 且認为前两个函数都是复变量 t 的函数。它們之間应有关系:

$$\varphi_1'^2(t)+\varphi_2'^2(t)+1=0。$$

这样一来，我們看出，所获得的極小曲面依賴于一个解析函数。例如，我們可写作:

$$x=R\varphi_1(t);\quad y=Ri\int\sqrt{1+\varphi_1'^2(t)}\,dt;\quad z=Rt,$$

其中 $\varphi_1(t)$ 是复变量 t 的任意解析函数。

可以写为更对称的样子，也就是:

$$\begin{cases} x=Ri\left[f(u)-uf'(u)-\dfrac{1-u^2}{2}f''(u)\right], \\ y=R\left[f(u)-uf'(u)+\dfrac{1+u^2}{2}f''(u)\right], \\ z=Ri[f'(u)-uf''(u)], \end{cases} \tag{49}$$

其中 $f(u)$ 是任意解析函数。 不难檢驗，在实部記号下的函数确实满足关系(48)。

6．考察泛函

$$D(u)=\iint\limits_B(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy, \tag{50}$$

其中 B 是平面(x, y)上某有界区域。由于(27)，这泛函的奥斯特洛格拉德斯基方程有形式:

$$u_{xx}+u_{yy}=0,$$

亦即拉普拉斯方程。我們很有理由相信，在区域 B 的境界 l 上有已知边界值的調和函数給泛函（50）以最小值，如果拿这調和函数跟在閉区域 B 内連續在 B 的内部有一阶連續偏导数且在 l 上取与上面提到的調和函数相同边界值的其他一切函数相比較的話。然而我們不能严格証明这个断言，因为奥斯特洛格拉德斯基方程只是給出極值的必要条件，且除此以外，必須記得，在推演这方程时我們曾假設待求函数存在二阶連續导数。我們將假設 B 是以原

点为心半徑为一的圓。

我們知道，对于在境界上任何已給的連續值存在唯一調和函数 v，这函数是狄义赫利問題对已知边界值的解。然而当接近于境界时关于这函数的一阶导数的性質不能有任何肯定，因此，我們不能断言对所構造的調和函数泛函(50)有有限值。事实上，在境界上可能給这样的連續边界值，使对于所構造的調和函数泛函(50)等于$(+\infty)$，更确切地講，亦即，若我們取积分(50)展布在半徑 r 小于一的同心圓 C_r 上，則当 $r\to 1$ 时这积分將無限地增大。可以証明，对具有一阶連續导数且有同一边界值的任何函数，泛函(50)也等于$(+\infty)$。

一般的說有以下定理：若当在境界 l 上的边界值已知时，泛函(50)对于某函数 u 有有限值，則对于有相同边界值的調和函数 v 也有有限值；并且 $D(v)\leqslant D(u)$ 且等号只在 u 及 v 相同时成立。

这定理的証明將在下面給出，而此刻在附加假設下来証明它，就是設調和函数 v 在圓的內部有一阶有界偏导数。这时积分(50)对于这个函数显然有有限值。我們可將函数 u 表为形式 $u=v+\varphi$，其中 φ 在区域的边界上等于零，而在內部有一阶連續导数。对于这函数泛函(50)有如下形式：

$$D(v+\varphi)=D(v)+D(\varphi)+2\iint\limits_{B}(v_x\varphi_x+v_y\varphi_y)\,dx\,dy。\tag{51}$$

应用格林公式到半徑 $r<1$ 的圓 B_r：

$$\iint\limits_{B_r}(v_x\varphi_x+v_y\varphi_y)\,dx\,dy=-\iint\limits_{B_r}\varphi\Delta v\,\,dx\,dy+\int_{C_r}\varphi\frac{\partial v}{\partial n}\,ds.$$

既然 v 是調和函数，右端的二重积分为零，而在沿半徑 $r<1$ 的圓周 C_r 的曲綫积分內，当 r 趋于一时，φ 关于幅角是一致收斂于零的，而 $\partial v/\partial n$ 保持有界，因而在取極限时这积分变为零。这样，取極限后左端的积分也变为零，因而公式(51)可写作如下形式：

$$D(v+\varphi)=D(v)+D(\varphi)。$$

然而显有 $D(\varphi)\geqslant 0$，而等号只当 φ 在圓 B 內恒等于零时才成立。于是我們确实有 $D(v)\leqslant D(u)$，并且等号只当 u 等于 v 时才成立。

68. 等周問題 我們回忆一下多变数函数的相对極值問題[I; 167]。完全类似地在变分学中对于某泛函提出了待求函数应在满足某附加条件下的極值問題。特別，提出下面問題：在使下

积分

$$(52)\qquad J_1=\int_{x_0}^{x_1}G(x,\ y,\ y')dx=a$$

有已知值 a 的一切曲綫 $y(x)$ 中，确定这样一条曲綫，它給出积分

$$(53)\qquad J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')dx$$

的極值。通常把这問題叫做等周問題。这术語是根据这样类型的問題而發生的，亦即在有定長 a 的一切閉曲綫中，求圍成最大面积的曲綫(圓周)。借助于下面定理，可將所提出的問題归結到沒有附加条件的变分問題：

尤拉定理 若曲綫 $y(x)$ 在条件(52)下及在尋常边界条件(8)下給积分(53)以極值，且若 $y(x)$ 不是积分(52)的極帶，則存在这样一个常数 λ，使曲綫 $y(x)$ 是积分

$$(54)\qquad \int_{x_0}^{x_1}H(x,y,y')dx$$

的極帶，其中

$$H=F+\lambda G。$$

我們考慮与 $y(x)$ 鄰近的函数：

$$(55)\qquad y(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x),$$

其中 α_1 及 α_2 是很小参数，而 $\eta_1(x)$ 及 $\eta_2(x)$ 是有尋常性質的函数，即在积分区間的兩端点这兩函数都等于零。將这函数代入积分(52)：

$$J_1(\alpha_1,\ \alpha_2)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,\ y+\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2,\ y'+\alpha_1\eta_1'+\alpha_2\eta_2')dx。$$

进行通常計算，則可写：

$$\frac{\partial J_1}{\partial\alpha_i}\bigg|_{\alpha_1=\alpha_2=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_i dx,\quad (i=1,\ 2)。$$

既然 $y(x)$ 不是积分(52)的極帶，則差 $G_y-\dfrac{d}{dx}G_{y'}$ 在区間

(x_0, x_1)內不恒等于零，因而显然可选擇函数 $\eta_2(x)$，使积分

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx$$

不等于零。

轉到方程 $J_1(\alpha_1, \alpha_2)=a$。$\alpha_1=\alpha_2=0$ 能滿足这方程，因为按照假設 $y(x)$ 是問題的解，且由于 η_2 的选擇，$J_1(\alpha_1, \alpha_2)$对 α_2 的偏导数在 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时不等于零。这样一来，由隐函数定理[**I**;**159**]方程 $J_1(\alpha_1,\alpha_2)=a$ 对于充分接近于零的一切值 α_1 确定 α_2 是 α_1 的函数，并且当 $\alpha_1=0$ 时 α_2 对 α_1 的导数显然由下面公式确定：

$$\left.\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=-\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_1 dx:$$

(56)

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx=k\text{。}$$

將函数(55)代入积分(53)且將所得的积分对 α_1 求导数，如果注意 α_2 是 α_1 的函数，則：

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_1 dx+k\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2 dx\text{。}$$

利用常数 k 的表达式(56)，可写：

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_1 dx+\lambda\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_1 dx\text{，}$$

其中

$$\lambda=-\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}Fy'\right)\eta_2 dx:\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx$$

或

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)+\lambda\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\right]\eta_1 dx\text{。}$$

既然 $y(x)$ 在条件(52)下給出积分(53)的極値，則我們应有 $\left.\frac{dJ}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=0$，由这个結論再注意到 $\eta_1(x)$ 的任意性及基本引理，

并置 $F+\lambda G=H$，則我們得到：

$$H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=0,$$

它是对于积分(54)的尤拉方程。所写出方程的通积分含有三个任意常数，就是：兩个积分常数及常数 λ。这些常数应从兩个边界条件及条件(52)来确定。

就这样所获得的結果，提出一点注意。当我們把积分(53)的积分号下的函数乘以任意常数时，这积分的極綫显然保持和以前的一样。由于这个事实我們可写函数H为对称形式：$H=\lambda_1F+\lambda_2G$，其中 λ_1 及 λ_2 是常数。因为参进 H 的表达式中的 F 及 G 是对称的，我們可断言，在积分(52)保持常数值的条件下来求积分(53)的極值所获得的極帶与在积分(53)保持常数值的条件下来求积分(52)的極值所获得的極帶是相同的。这就構成所謂对偶原理的簡單形式。这时我們認为常数 λ_1 及 λ_2 都不等于零，亦卽除去是积分(52)或积分(53)的極帶的那些曲綫。

在例子中我們將闡明尤拉定理中要求 $y(x)$ 不是积分(52)的極帶的意义。在更一般情况的等周問題有如下形式：求一組函数 $y_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，使当具有关系式

$$\int_{x_0}^{x_1}G_s(x, y_1, y_1', \cdots, y_n, y_n')dx=a_s,\quad (s=1, 2, \cdots, p)$$

及边界条件

$$y_i(x_0)=y_i^{(0)};\ y_i(x_1)=y_i^{(1)},\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

时，它們給下积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y_1, y_1', \cdots, y_n, y_n')dx$$

以極值。

同前面一样，在有几个附加条件来保証可应用隱函数存在定理时，我們可以断定，給出所建立的問題的解 $y_i(x)$ 应当是积分

$$\int_{x_0}^{x_1} H(x, y_1, y_1', \cdots, y_n, y_n')\,dx$$

的極帶，其中

$$H = F + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s G_s,$$

且 λ_s 都是常数。这个断言的証明和上面相类似。我們注意，关系式的个数 p 也可以大于待求函数的个数 n。

69. 条件極值 現在考虑这样問題，在这問題中的附加条件的形式与(52)有所不同。从最簡單的問題着手。求兩个函数 $y(x)$ 及 $z(x)$，它們給出积分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\,dx \tag{57}$$

的極值，且滿足方程

$$G(x, y, z) = 0 \tag{58}$$

及固定端点的边界条件：

$$y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = z_0,$$
$$y(x_1) = y_1; \quad z(x_1) = z_1,$$

并且坐标 (x_0, y_0, z_0) 及 (x_1, y_1, z_1) 显然地应滿足方程(58)。

在几何意义上，問題归結到求一条曲綫，它位置在曲面(58)上且給出积分(57)的極值。我們也可以从方程(58)确定 z 为 x 及 y 的函数，且將这函数代入积分(57)；这时我們就归結为具有一个待求函数 $y(x)$ 的沒有任何附加条件的寻常的变分学問題。我們就利用这样看法来給出所提出的問題的解 $y(x)$ 及 $z(x)$ 应滿足的方程。我們認为，沿着这个解偏导数 G_z 不等于零。这时方程(58)可就 z 解出，得到 $z = \varphi(x, y)$。然后將这表达式代入积分(57)，則(57)取下面的形式：

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \varphi, \varphi_x + \varphi_y y')\,dx。\tag{59}$$

把所論的空間曲綫投影到平面 (x, y) 后得出来的平面曲綫 l 在端点固定时应当給积分(59)以極值,因之,它应当滿足对于这积分所写出的尤拉方程。要想写出这个尤拉方程,我們先作一些計算。用 $[F]$ 表示(59)中积分号下的函数。这函数依賴于 (x,y,y')。用沒有方括号的 F 記原来函数 $F(x, y, y', z, z')$,因而 $[F]$ 是从 F 中代入 $z=\varphi(x,y)$ 及 $z'=\varphi_x+\varphi_y y'$ 所获得的結果。我們有:

$$\frac{\partial[F]}{\partial y}=F_y+F_z\varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y');\quad \frac{\partial[F]}{\partial y'}=F_{y'}+F_{z'}\varphi_y;$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial[F]}{\partial y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}+\varphi_y\frac{d}{dx}F_{z'}+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y')。$$

积分(59)的尤拉方程是:

$$\frac{\partial[F]}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial[F]}{\partial y'}=0,$$

且由于上面所写的公式,导向以下形式:

$$F_y+\varphi_y\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)-\frac{d}{dx}F_{y'}=0。$$

另一方面,將方程(58)对 y 微分給出:

$$G_y+G_z\varphi_y=0,$$

因而从最后兩个方程消去 φ_y,我們导出等式:

$$\left(\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y\right):G_y=\left(\frac{d}{dx}F_{z'}-F_z\right):G_z。$$

所写出等式的兩端沿着極帶是 x 的同一个函数,用 $\lambda(x)$ 来記它,于是可写:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}-[F_y+\lambda(x)G_y]=0,$$

$$\frac{d}{dx}F_{z'}-[F_z+\lambda(x)G_z]=0。$$

这就是極值的必要条件。不难看出,它們能够写作下面的式样:

(60) $$\frac{d}{dx}F^*_{y'}-F^*_y=0;\ \frac{d}{dx}F^*_{z'}-F^*_z=0,$$

其中

(61) $$F^*=F+\lambda(x)G,$$

亦郎我們問題的極帶应当是以公式(61)表示的函数 F^* 为被积函数的泛函在沒有附加条件时極帶。我們注意，在这情况，代替在等周問題中的常数因子 λ 的，是 x 的函数 $\lambda(x)$。从(58)及(60)消去 $\lambda(x)$ 及一个待求函数，例如 z，我們得到含一个函数 $y(x)$ 的二阶微分方程。这方程的积分的兩个任意常数应从兩个边界条件来确定。

所述的討論也可轉到有任何个数的待求函数及关系式的更一般形式的問題，并且在这情况关系式的个数必須小于待求函数的个数。在具有約束式：

(62) $$G_s(x,\ y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n)=0,\ (s=1,\ 2,\cdots,\ p)$$

及边界条件：

(63) $$y_i(x_0)=y_i^{(0)};\ y_i(x_1)=y_i^{(1)},\ (i=1,\ 2,\cdots,n)$$

下，求积分

(64) $$\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y_1,\ y_1',\cdots,\ y_n,y_n')\,dx$$

的極值問題引导出方程

(65) $$\frac{d}{dx}F^*_{y_i'}-F^*_{y_i}=0,\ (i=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

其中

(66) $$F^*=F+\sum_{s=1}^{p}\lambda_s(x)G_s,$$

且 $\lambda_s(x)$ 是 x 的某些函数。

这时假設，在由偏导数 $\partial G_s/\partial y_i$ 組成的一切 p 級函数行列式中如果將 y_i 换为給积分(64)以極值的函数，則至少有一个函数行列

式不等于零。

关系式(62)不含有待求函数的导数，通常叫作整約束。上面的断言对于形式如下的非整約束：

(67) $G_s(x, y_1, y_1', \cdots, y_n, y_n')=0, \quad (s=1, 2, \cdots, p)$

也是正确的，亦即在某些附加条件下，函数 y_i 在条件(67)下給积分(64)以極值，它們应满足方程：

$$\frac{d}{dx}F^*_{y_i'}-F^*_{y_i}=0, \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{68}$$

其中

$$F^*=F+\sum_{s=1}^{p}\lambda_s(x)G_s(x, y_1, y_1', \cdots, y_n, y_n')。\tag{69}$$

方程組(68)与整約束情况下的这种方程組有一个重要差别。因为(67)中的函数在所考慮的情况含有导数 y_i'，所以函数 $F^*_{y_i'}$ 將含有 $\lambda_s(x)$，因而方程(68)含有 $\lambda_s(x)$ 对 x 的导数。最后，方程(67)及(68)給出有 $(n+p)$ 个待求函数 y_i 及 $\lambda_s(x)$ 的 $(n+p)$ 个微分方程的方程組，它关于 y_i 是二阶的且关于 $\lambda_s(x)$ 是一阶的。

在討論中引入函数 $z_i(x)$，它們是由下面等式：

(70) $z_i(x)=y_i'(x), \quad (i=1, 2, \cdots, n)$

所确定的。經过这样代替后，方程(67)給出对于 y_i 及 z_i 的 p 个整約束式，于是(68)及(70)变为含 $(2n+p)$ 个函数 y_i, z_i 及 $\lambda_s(x)$ 的 $2n$ 个的一阶微分方程組。从(67)解出随便那些 p 个 y_i 及 z_i，且將它們的表达式代入方程(68)及(70)中，得到 y_i, z_i, $\lambda_s(x)$ 中的 $2n$ 个函数的 $2n$ 个一阶方程。这方程組的通解含有 $2n$ 个任意常数，它們应由 $2n$ 个边界条件来确定。

70. 例 1. 在連接兩定点 A 及 B 長度为 l 的一切曲綫中，确定这样一条曲綫，它和直綫段 AB 一起圍成最大面积。以經过兩点 A 及 B 的直綫作为 X 軸，且設 x_0 及 x_1 是这些点的横标。我們認为待求曲綫 y 在区間 $[x_0, x_1]$ 內是 x 的單值函数。問題归結到要求出积分：

(71) $$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$$

在附加条件：

(72) $$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$$

下的最大值。(72) 中的积分表示曲綫 $y(x)$ 在点 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 之間的長度。它的極帶显然是直綫。这事情可以直接由这积分的尤拉方程来驗証。若 $l<x_1-x_0$，則沒有一条曲綫滿足条件 (72)。若 $l=x_1-x_0$，則只有直綫段 AB 滿足条件(72)。在这兩个情况提出的問題沒有意义，因而以后將認为 $l>x_1-x_0$。在所考慮的情况

$$F^* = y+\lambda\sqrt{1+y'^2},$$

并且这函数不含有 x，因此相应的尤拉方程的初积分是：

$$F^*-y'F^*_{y'} = y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = b,$$

从而

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}}{y-b}$$

或

$$\frac{(y-b)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}} = dx;$$

积分之，得：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2,$$

亦即極帶將是半徑为 $|\lambda|$ 的圓周。

設 ω 是从圓心对于綫段 AB 的視角：

$$x_1-x_0 = 2\lambda\sin\frac{\omega}{2} \text{ 及 } l=\lambda\omega。$$

确定 ω 的是方程：

$$\sin\frac{\omega}{2}:\frac{\omega}{2}=(x_1-x_0):l,$$

在上面指出的条件下这方程总可能有解。利用对偶原理，我們可說出命題：在圍成面积为定值的一切曲綫中，圓周的弧有極值（显然是最小）長度。还要注意的是，若 $l>\frac{\pi}{2}(x_1-x_0)$，則 y 不是 x 的單值函数。

利用获得的結果，可以証明，若在有定長的一切曲綫中，有一封閉曲綫圍

成最大面积，則这曲綫必是圓周。

2. 要求确定在固定端点且有定長 l 的有重的均匀細繩在重力作用下的平衡位置。我們認为重力的方向是与 y 軸的負向一致的。于是平衡位置就是要使細繩的重心在最低处的位置。我們自然可認为平行于 y 軸的任何直綫与細繩的交点不多于一个。問題归結到在附加条件：

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l \tag{73}$$

及边界条件：$y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ 下，求积分

$$\int_{x_0}^{x_1}y\,ds=\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

的極値[参考 67 段例 4]。在这情况，有：

$$F^*=y\sqrt{1+y'^2}+\lambda\sqrt{1+y'^2},$$

且尤拉方程的初积分是：

$$\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}=a \quad 或 \quad \frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2-a^2}}=\frac{dx}{a}。$$

若令

$$y+\lambda=a\operatorname{ch}z=a\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

則方程容易积出：

$$y+\lambda=a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}+b\right)=a\frac{e^{\frac{x}{a}+b}+e^{-\left(\frac{x}{a}+b\right)}}{2},\ (a>0),$$

亦即問題的極帶是悬鏈綫。常数 a, b 及 λ 应从边界条件：

$$y_0+\lambda=a\operatorname{ch}\left(\frac{x_0}{a}+b\right);\quad y_1+\lambda=a\operatorname{ch}\left(\frac{x_1}{a}+b\right)$$

及条件 (73) 来确定。从一个边界条件减另一个边界条件且变换双曲余弦函数的差为乘积，則有：

$$y_1-y_0=2a\operatorname{sh}\mu\operatorname{sh}\nu, \tag{74}$$

其中

$$\mu=\frac{x_1+x_0}{2a}+b;\quad \nu=\frac{x_1-x_0}{2a}。$$

將求得的 y 值代入条件(73)后，可把它化为下式：

$$a\left[\operatorname{sh}\left(\frac{x_1}{a}+b\right)-\operatorname{sh}\left(\frac{x_0}{a}+b\right)\right]=l$$

或

$$2a \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \nu = l。 \tag{75}$$

由于(74)，得：

$$\operatorname{th} \mu = \frac{y_1 - y_0}{l}。 \tag{76}$$

数值 l 显然应满足不等式：

$$l > \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} > |y_1 - y_0|,$$

因而方程(76)有唯一根。从(74)及(75)我們得：

$$\sqrt{l^2 - (y_1 - y_0)^2} = 2a \operatorname{sh} \nu$$

或

$$\frac{\operatorname{sh} \nu}{\nu} = \frac{\sqrt{l^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0}。 \tag{77}$$

但

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots。$$

当 $0 \leqslant x < \infty$ 时是从 1 到 $(+\infty)$ 的單調增函数，取任何值一次且只取一次，因此方程(77)有唯一正根。这样的找得 μ 及 ν 后，求 a, b 及 λ 已經沒有什么困难了。

3. 考虑彈性均勻梁，在沒有变形的狀态是直的。从彈性理論，在变形狀态下，我們知道它的位能与它的曲率的平方沿着梁的积分成正比。設这梁的長度为 l 且固定在兩点 (x_0, y_0) 及 (x_1, y_1) 处。取从点 (x_0, y_0) 算起的梁的長度 s 作为自变量，且用 $\theta(s)$ 記梁的切綫与 x 軸的交角。曲率可用导数 $\theta'(s)$ 來表示，因而所要找極值的积分具有形式：

$$\int_0^l \theta'^2 ds。 \tag{78}$$

大家知道的，

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta; \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta,$$

因之我們有下面兩个約束方程：

$$\int_0^l \cos\theta\, ds = x_1 - x_0; \quad \int_0^l \sin\theta\, ds = y_1 - y_0。 \tag{79}$$

除此以外，梁在端点处固定的这个条件無异于給定了函数 $\theta(s)$ 在 $s=0$ 及 $s=l$ 兩点的值：

$$\theta(0) = a; \quad \theta(l) = b。 \tag{80}$$

在这情况：

$$F^* = \theta'^2 + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta,$$

由于这函数不含有自变量 s，因而立即有尤拉方程的初积分如下：

$$\theta'^2 = C + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta。$$

引入两个新常数：

$$h = C + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}; \quad k^2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{C + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}},$$

且代替 θ 引入新变量 φ：

$$\varphi = \frac{\theta - \theta_0}{2},$$

其中令 $\theta_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$。在这些記号下前面所写的尤拉方程的初积分变成如下形式：

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{h}}{2}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$

从而我們得到用 φ 的椭圓积分来表达的 s：

$$s = \frac{2}{\sqrt{h}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} + s_0。$$

常数 k, h, θ_0 及 s_0 应从条件(79)及(80)来确定。为了求梁上点的笛卡尔坐标，只須在关系式

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta = \cos(2\varphi + \theta_0); \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta = \sin(2\varphi + \theta_0)$$

中代入 ds 的表达式：

$$dx = \frac{2\cos(2\varphi + \theta_0)}{\sqrt{h}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} d\varphi; \quad dy = \frac{2\sin(2\varphi + \theta_0)}{\sqrt{h}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} d\varphi,$$

由此立即可用不定积分法求出 x 及 y。

4．考察在已知曲面：

$$G(x, y, z) = 0 \tag{81}$$

上求測地綫的問題。

問題归結到在附加条件(81)下求积分

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

的極值。在这情况，方程(60)有下列形式：

(82) $$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda G_y=0;\ \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda G_z=0。$$

为了要闡明測地綫的基本几何性質，从方程(81)对 x 求全导数：

$$G_x+G_y y'+G_z z'=0。$$

將兩端乘以 λ 且把从(82)所得的 λG_y 及 λG_z 的表达式代入，經过一些簡單的变换后，导出等式：

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda G_x=0,$$

这与(82)中的等式相类似，并且对 x 求导数的那些分式等于待求的測地綫的切綫的方向余弦，故我們可写这些方程如下形式：

$$\frac{d\cos\alpha}{dx}=\lambda G_x;\ \frac{d\cos\beta}{dx}=\lambda G_y;\ \frac{d\cos\gamma}{dx}=\lambda G_z。$$

利用公式 $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$，我們可用对 s 的导数代替对 x 的导数，于是得：

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}=\mu G_x;\ \frac{d\cos\beta}{ds}=\mu G_y;\ \frac{d\cos\gamma}{ds}=\mu G_z,$$

其中 $\mu=\lambda\cos\alpha$。然而，如已知的[II;125]，所写出方程的左端与曲綫的主法綫的方向余弦成正比，而右端与曲面的法綫的方向余弦成正比，从而立即推出測地綫上各点的主法綫同时也是曲面的法綫。

5. 考察在有阻力的媒質中的最速落徑問題：在連接兩定点 A 及 B 的一切曲綫中，确定一条曲綫，沿着它一个質点以已知速度在最短时間內下落到最低位置，并且在媒質內有阻力，且以速度 v 的已知函数 $R(v)$ 来表示这阻力。

从力学上的理由立即推知，待求曲綫应在一个平面內，这平面通过直綫 AB 及从 A 点引出的鉛垂綫。我們取这平面作为 (x, y) 平面，且 y 軸的方向是沿鉛垂綫向下的。設 (x_0, y_0) 及 (x_1, y_1) 是 A 点及 B 点的坐标。当沿着曲綫运动时动能的改变量是由重力作用的正功及阻力的負功而产生的，亦即：

$$d\frac{v^2}{2}=g\,dy-R(v)\,ds,$$

其中 g 是重力加速度且 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$。用 x 作为函数 v 及 y 的自变量，就得到：

(83) $$vv'-gy'+R(v)\sqrt{1+y'^2}=0,$$

因而問題归結到在具有非整約束(83)时求积分

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx$$

的極值，并且 v 及 y 是待求函数。

尋常类型的边界条件应归結为函数在区間的端点的已知值：

(84) $$y(x_0)=y_0;\quad y(x_1)=y_1,$$

(85) $$v(x_0)=v_0;\quad v(x_1)=v_1。$$

条件(85)的第一式無异于給出动点在开始位置 A 的速度。而条件(85)的第二式相当于給出动点在曲綫的終点的速度，而从力学观点这是不自然的。以后我們还將回到这个問題。用尋常方法，我們应写出对于函数：

(86) $$F^*=\sqrt{1+y'^2}\,H+\lambda(x)\,vv'-\lambda(x)\,gy'$$

的尤拉方程，其中

$$H=\frac{1}{v}+\lambda(x)\,R(v)。$$

函数 F^* 不含有 y，因而它关于 y 的尤拉方程显然有初积分 $F^*_{y'}=C$，或是

(87) $$\frac{Hy'}{\sqrt{1+y'^2}}=C+\lambda(x)\,g,$$

而函数 F^* 的关于 v 的尤拉方程是：

$$\sqrt{1+y'^2}\,H_v+\lambda(x)\,v'-\frac{d}{dx}[\lambda(x)\,v]=0$$

或

(88) $$\frac{v\lambda'(x)}{\sqrt{1+y'^2}}=H_v。$$

这样一来，我們有函数 y, v, λ 的三个方程(83)，(87)，(88)形成的方程組。直接將差 $H^2-(C+g\lambda)^2$ 对 x 微分，且应用上面的三个方程，我們确信存在以下积分：

(89) $$H^2-(C+g\lambda)^2=a^2,$$

其中 a 是新任意常数。从所写的方程可确定 λ 为 v 的函数：$\lambda=\lambda(v)$。將方程(87)各項除以(88)，得到：

(90) $$dy=\frac{(C+g\lambda)\,v\,d\lambda}{HH_v}。$$

由于(87)及(89)：

$$y'=\frac{C+g\lambda}{a},$$

从而

(91) $$dx=\frac{avd\lambda}{HH_v}。$$

將等式(90)及(91)的右端代以 $\lambda=\lambda(v)$ 且求不定积分，有：

$$x=d+\varphi(v,\ a,\ C);\ y=e+\psi(v,\ a,\ C),$$

其中 d 及 e 是任意常数。于是所写的兩方程給出待求最速落徑的参数表示式，并且 v 起着参数作用。任意常数应由边界条件(84)及(85)来确定。我們以后將見到条件(85)的后面一个应代以条件：

$$F^*_{v'}\Big|_{x=x_1}=0,$$

它表示这样事实，就是当 $x=x_1$ 时速度 v 可有任意值。由于(86)，所写的条件有形式 $\lambda v\Big|_{x=x_1}=0$。如果認为速度不等于零，则得到 $\lambda\Big|_{x=x_1}=0$。

71. 尤拉及奥斯特洛格拉德斯基方程的不变性 当求一个变量的函数 $y=f(x)$ 的極值时，我們可变換自变量，代替 x 引入新自变量 ξ：$x=\varphi(\xi)$，并且假設 $\varphi(\xi)$ 是單調的且有不等于零的导数。由求复合函数导数的法則給出：

(92) $$\frac{dy}{d\xi}=f'(x)\varphi'(\xi)。$$

就新自变量的函数来說，有極值的必要条件是 $f'(x)\varphi'(\xi)=0$，且由于 $\varphi'(\xi)\neq 0$，則新条件与旧条件 $f'(x)=0$ 一致。对于在各种不同情况的尤拉方程的左端也可得到与公式(92)相类似的公式。首先着手考虑最簡單的泛函：

(93) $$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')dx$$

且为了写法簡單起見，对于尤拉方程的左端引入特别記号：

$$[F]_y=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}。$$

引进新自变量 ξ，可写：

$$F(x,\ y,\ y')=F\left[x(\xi),\ y,\ \frac{dy/d\xi}{dx/d\xi}\right]=\Phi\left(\xi,y,\frac{dy}{d\xi}\right),$$

因而在用新自变量时积分 J 就取以下形式：

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}\,d\xi。$$

引用鄰近函数 $y+\alpha\eta$ 且进行寻常計算，我們得到：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\,dx\bigg|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1}[F]_y\eta\,dx。$$

这同一表达式在用新自变量时可写为以下形式：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\left(\xi, y+\alpha\eta, \frac{dy}{d\xi}+\alpha\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}\,d\xi\bigg|_{\alpha=0} = \int_{\xi_0}^{\xi_1}\left[\Phi\frac{dx}{d\xi}\right]_y\eta\,d\xi;$$

把所得的兩个結果看成一样，可写：

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{[F]_y - \left[\Phi\frac{dx}{d\xi}\right]_y\frac{d\xi}{dx}\right\}\eta\,dx = 0,$$

由于函数 η 是任意的，从而按照基本引理有：

$$[F]_y = \left[\Phi\frac{dx}{d\xi}\right]_y\frac{d\xi}{dx}, \tag{94}$$

并且右端的符号应在自变量是 ξ 的假設下展开，亦即

$$\left[\Phi\frac{dx}{d\xi}\right]_y = \frac{dx}{d\xi}\Phi_y - \frac{d}{d\xi}\left\{\Phi_{\frac{dy}{d\xi}}\frac{dx}{d\xi}\right\}。$$

公式 (94) 完全与上面說过的公式 (92) 相类似，而尤拉方程 $\left[\Phi\frac{dx}{d\xi}\right]_y=0$ 显然無异于尤拉方程 $[F]_y=0$。所有的一切都可推广到积分号下函数含有多个待求函数的情况。

我們考虑兩个自变量的泛函：

$$J = \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy。$$

代替 (x, y) 引入兩个新自变量 (ξ, η)：

$$x = x(\xi, \eta);\quad y = y(\xi, \eta),$$

并且假設所写的函数有連續导数，且与它們相应的函数行列式不等于零。把积分号下函数变换到新自变量：

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=F[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta),u,u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y]=$$
$$=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)。$$

如同前面一样，引入鄰近函数 $u+\alpha\eta$，將积分对 α 微分且令 $\alpha=0$，將有：

$$(94_1)\qquad \iint[F]_u\eta\,dx\,dy=\iint_{B_1}\left[\Phi\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_u\eta\,d\xi\,d\eta,$$

其中 B_1 是作上述变量替换后区域 B 所变换的結果，$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ 是通常函数行列式的記号，且符号 $[\ ]_u$ 記奥斯特洛格拉德斯基方程的左端，亦即，例如：

$$[F]_u=F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}。$$

在公式 (94_1) 右端的积分中作变量替换且利用函数 η 的任意性，我們得到奥斯特洛格拉德斯基方程的左端变換到新自变量后的下面公式：

$$[F]_u=\left[\Phi\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_u\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}。$$

在有更多的自变量的情况，也可获得完全类似的公式。奥斯特洛格拉德斯基方程 $[F]_u=0$ 等价于改用新自变量后的奥斯特洛格拉德斯基方程 $\left[\Phi\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]_u=0$。

也可同时作自变量及函数的替換。比方說，在泛函(93)的情况，若引入新变量 (ξ,η) 代替 (x,y)：

$$x=\varphi(\xi,\eta);\quad y=\psi(\xi,\eta),$$

則改用新变量后將有函数 $\eta=f_1(\xi)$ 代替函数 $y=f(x)$。变換泛函(93)到新变量，得：

$$J=\int_{\xi_0}^{\xi_1}F\left[\varphi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta),\frac{\psi_\xi+\psi_\eta\eta'}{\varphi_\xi+\varphi_\eta\eta'}\right](\varphi_\xi+\varphi_\eta\eta')d\xi=$$
$$=\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Phi(\xi,\eta,\eta')d\xi,$$

也同前面一样，尤拉方程 $[F]_y=0$ 等价于尤拉方程 $[\Phi]_\eta=0$。

在下一段中我們將研究这样情况下的尤拉方程，即函数关系 $y(x)$ 是由参数形式給出时的尤拉方程。

72. 参数形式 当寻求泛函的極值时，要求待求曲綫有显式方程 $y=y(x)$，在实質上已把問題縮小了，因为平行于 y 軸的直綫与給出問題的解的曲綫，可能有多于一个的交点。我們現在来討论待求曲綫的方程有参数形式的一般情况。如果認为 x 及 y 都是某参数 t 的函数，那末我們可写积分(93)如下形式：

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F\left(x,\ y,\ \frac{y'}{x'}\right)x'dt, \tag{95}$$

其中 x' 及 y' 是对于 t 的导数，而 t_0 及 t_1 是与曲綫的兩端点相对应的参数值。当任意选擇参数 t 时积分 J 有形式(95)。

我們指出下面的事实，就是积分号下的函数不含有自变量 t 且是对于 x' 及 y' 的一次齐次函数。考虑更一般的某个积分：

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(x,\ y,\ x',\ y')dt, \tag{96}$$

在其中积分号下的函数不含有自变量 t 且是对于 x' 及 y' 的一次齐次函数，亦即：

$$F(x,\ y,\ kx',\ ky')=kF(x,\ y,\ x',\ y')。 \tag{97}$$

我們証明，这时不管对参数 t 作任何替换，积分总不改变它的形式。代替 t 引入另一参数 τ，且令 $\tau=\tau(t)$，并且認为 $\tau'(t)>0$，因而当 t 增大时 τ 也增大。把积分(96)中的变量 t 改为变量 τ，得：

$$J=\int_{\tau_0}^{\tau_1}F(x,\ y,\ x'_\tau\tau'_t,\ y'_\tau\tau'_t)t'_\tau d\tau,$$

且利用公式(97)，可写：

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}F(x,\ y,\ x'_\tau\tau'_t,\ y'_\tau\tau'_t)t'_\tau d\tau=\int_{\tau_0}^{\tau_1}F(x,\ y,\ x'_\tau,\ y'_\tau)d\tau,$$

亦即当变换参数时积分(96)不改变它的形式。

我們指出，这里的 τ'_t 起着公式(97)中的 k 的作用，因此只要求恒等式(97)当 $k>0$ 时成立就行了。以后將假設对于积分(96)条件(97)总是实現的。

我們回忆一下，当对以显式給出的曲綫来定义它的接近度时，所要求的是各曲綫皆对应于同一横标的縱标間的接近度。在参数式方程的一般情况下，可以定义不依賴于参数选擇的接近度，也就是說，如果在 l 及 l_1 的一切点間，可建立互为單值的及互为連續的这样对应，使得对应点間的距离不大于 ε，則曲綫 l 位于曲綫 l_1 的零級 ε-接近度內。类似地可定义一級 ε-接近度。

現在轉到極值的必要条件的証明。設某曲綫 l 給出积分的極值。作出曲綫 l 的以任何方式选擇的参数方程，因而 l 的方程將是：$x(t)$，$y(t)$。取鄰近曲綫 $x(t)+\alpha\eta(t)$，$y(t)+\alpha_1\eta_1(t)$，并且認为对应点是取同一个参数值得到的。將鄰近曲綫的方程代入积分(96)且把对 α 及 α_1 的导数在 $\alpha=\alpha_1=0$ 时等于零，我們可照常証明，对于参数 t 的任何选擇，函数 $x(t)$ 及 $y(t)$ 应滿足兩个尤拉方程的方程組：

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0;\quad F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=0。\tag{98}$$

这些方程不显含参数本身。此外，我們指出，实質上兩函数中的一个，$x(t)$或 $y(t)$ 可作为是任意的。事实上，作参数变換 $t(\tau)$，我們得到 $x[t(\tau)]$ 及 $y[t(\tau)]$，而由于 $t(\tau)$ 的任意性，我們可認为这兩函数中的一个是 τ 的任意函数。从这个情况来考虑，我們就很有理由相信(98)中的兩个方程可归結成一个方程。現在証明这件事情。

將表达齐次函数 F 的性質[**I**; **154**]的恒等式

$$F=x'F_{x'}+y'F_{y'}$$

的兩端对 x, y, x', y' 微分，我們得：

$$F_x=x'F_{xx'}+y'F_{xy'};\quad F_y=x'F_{yx'}+y'F_{yy'},\tag{99}$$

$$0=x'F_{x'x'}+y'F_{x'y'};\quad 0=x'F_{x'y'}+y'F_{y'y'}。$$

从后面兩个等式得出：

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2}=\frac{F_{x'y'}}{-x'y'}=\frac{F_{y'y'}}{x'^2}=F_1(x,y,x',y'),\tag{100}$$

其中以 F_1 記所写三个比式的公共值。回到方程(98)且进行微分，則它們取以下形式：

$$F_x-x'F_{xx'}-y'F_{yx'}-x''F_{x'x'}-y''F_{x'y'}=0,$$

$$F_y-x'F_{xy'}-y'F_{yy'}-x''F_{x'y'}-y''F_{y'y'}=0。$$

由公式(100)，將这些方程中的 $F_{x'x'}$, $F_{x'y'}$ 及 $F_{y'y'}$ 作代換，而由公式(99)將其中的 F_x 及 F_y 替換，就把它們变为下面形式：

$$y'T=0;\quad x'T=0,$$

其中

$$T=F_1(x,\ y,\ x',\ y')(x'y''-y'x'')+F_{xy'}-F_{yx'}。$$

我們認为 x' 及 y' 不同时为零，因此所写的兩个方程确实归到一个方程：

$$T=F_1(x,\ y,\ x',\ y')(x'y''-y'x'')+F_{xy'}-F_{yx'}=0。\tag{101}$$

我們还可附加一个方程到这个与方程組(98)等价的且有兩待求函数的方程上，而这附加的方程表征出参数 t 的具体选擇。例如，若选擇待求極帶的弧長 s 作为参数，則这附加的方程就有形式 $x'^2+y'^2=1$。如果注意平面曲綫的曲率半徑表达式 [I;71]，則方程(101)可写为以下形式：

$$\frac{1}{R}=\frac{F_{xy'}-F_{yx'}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}F_1}。\tag{102}$$

所說的一切可沒有困难的推广到 n 維空間的曲綫的泛函。考慮下面积分：

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(x_1,\ x_1',\ \cdots,\ x_n,\ x_n')\,dt, \tag{103}$$

其中 x_i 是 t 的函数，而 x_i' 是导数。和前面一样，我們总假定函数 F 是对于 x_i' 的齐一次函数。这时对于参数 t 的任何变换，积分 (103) 总是不变的。和前面一样，不难証明，为了要求 n 維空間 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 的曲綫給积分(103)以極値，它必須滿足下面的尤拉方程組：

$$F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{104}$$

或

$$F_{x_i}-\sum_{s=1}^{n}x_s'F_{x_i'x_s}-\sum_{s=1}^{n}x_s''F_{x_i'x_s'}=0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

不难檢驗，这些方程的左端由下面关系相联系：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i'\left(F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}\right)&=\\ &=\sum_{i=1}^{n}x_i'F_{x_i}-\sum_{i,s=1}^{n}x_i'x_s'F_{x_i'x_s}-\sum_{i,s=1}^{n}x_i'x_s''F_{x_i'x_s'}\equiv 0。\end{aligned} \tag{105}$$

事实上，由于 F 的齐次性，按照尤拉定理，可写：

$$F=\sum_{i=1}^{n}x_i'F_{x_i'};$$

將这恒等式对 x_s 及 x_s' 微分，得：

$$F_{x_s}=\sum_{i=1}^{n}x_i'F_{x_i'x_s};\quad 0=\sum_{i=1}^{n}x_i'F_{x_i'x_s'}。$$

从这些恒等式，立即显示出公式(105)的中間部份的和确实恒等于零。这样一来，方程組(104)中的一个方程是其余的方程的推論，因而我們还可附加表征参数选擇的一个方程到方程組 (104) 去。我們注意，这里叙述的一切理論也可推广到重积分的情况。

73. 在 n 維空間內的測地綫　設在实 n 維空間內定义某一測度

$$ds^2=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}dx_idx_k,\quad (a_{ik}=a_{ki}), \tag{106}$$

其中 a_{ik} 都是变量 x_s 的已知函数。我們假設这些函数和它的一阶偏导数都是連續的。測度(106)的給定就等于說任何曲綫 $x_s(t)$ $(s=1, 2, \cdots, n)$的長度由积分

$$J=\int ds=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i' x_k'}\, dt \tag{107}$$

来表达，并且認为在根号下面的式子对任何值 x_s 及 x_s' 总是正的，且假定不是一切 x_s' 都为零，也就是，我們假設已知二次型(106)是正定的。我們自然可認为有相同微分的乘积的系数 a_{ik} 及 a_{ki} 也是相等的，亦即 $a_{ik}=a_{ki}$。

积分(107)的極帶叫做測地綫。这概念是前面講到过的在曲面上的測地綫的概念的直接推广。为書写簡短起見，用 φ 記根号下的和：

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i' x_k'。 \tag{108}$$

我們有关于極帶的下面的尤拉方程組：

$$\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varphi_{x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varphi_{x_i'}\right)=0, \quad (i=1, 2, \cdots, n)。 \tag{109}$$

这方程組中的一个方程可由其余方程的推演出来，因而我們也还可附加一个方程，就是：

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i' x_k'=1, \tag{110}$$

且設 s 是参数 t 的那个值，而这值是由这个附加方程所决定的。从(107)立即推知，(110)等于說选择 n 維空間的曲綫的弧長 s 来作为参数 t。由于(110)方程組(109)可簡化为下形式：

$$\varphi_{x_i}-\frac{d}{ds}\varphi_{x_i'}=0, \quad (i=1, 2, \cdots, n)。 \tag{111}$$

不难驗証，这方程組有解：

$$\varphi=常数。$$

事实上：

$$\frac{d\varphi}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}x_i'+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i'}x_i''。$$

但由于 φ 是 x_i' 的二次齐次多項式，我們有：

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i'}x_i'=2\varphi,$$

因之，有：

$$2\frac{d\varphi}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i'}x_i''+\sum_{i=1}^{n}x_i'\frac{d}{ds}\varphi_{x_i'}。$$

利用这个等式，則 $d\varphi/ds$ 可写作如下形式：

$$\frac{d\varphi}{ds}=2\frac{d\varphi}{ds}+\sum_{i=1}^{n}x_i'\left(\varphi_{x_i}-\frac{d}{ds}\varphi_{x_i'}\right),$$

且由于(111)，我們有 $\frac{d\varphi}{ds}=0$，亦卽 $\varphi=$常数是方程組(111)的解，如果令任意常数等于一，則可得附加条件(110)。

現在我們写出方程組(111)的展开式：

$$\varphi_{x_i}-\sum_{s=1}^{n}\varphi_{x_i'x_s}x_s'-\sum_{s=1}^{n}\varphi_{x_i'x_s'}x_s''=0,$$

或者，把表示式(108)代到这个式子里，就有：

$$\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial a_{pq}}{\partial x_i}x_p'x_q'-\sum_{p,s=1}^{n}\frac{\partial a_{pi}}{\partial x_s}x_s'x_p'-\sum_{s=1}^{n}a_{si}x_s''=0。$$

討論第二个和。在其中 $x_s'x_p'$ 及 $x_p'x_s'$ 的系数不是相等的，然而我們可用它們的和的一半：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial x_s}+\frac{\partial a_{si}}{\partial x_p}\right)$$

来代替这兩个系数的每一个，則可使这兩个系数相等。合并第一和与第二和且变符号，最后可將方程組引到下面的形式：

$$(112)\qquad \sum_{s=1}^{n}a_{si}x_s''+\sum_{p,q=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial x_q}+\frac{\partial a_{qi}}{\partial x_p}-\frac{\partial a_{pq}}{\partial x_i}\right)x_p'x_q'=0,\ (i=1,2,\cdots,n)。$$

在这些方程中导数是对弧長 s 取得的。在第二和中括弧內的表示式用微分几何中的术語叫做第一种克利斯朶夫符号且記作如下式样：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial x_q}+\frac{\partial a_{qi}}{\partial x_p}-\frac{\partial a_{pq}}{\partial x_i}\right)=\begin{bmatrix}pq\\ i\end{bmatrix}。$$

可將方程(112)写为就 x_s'' 解出的形式。用 a^{ik} 記关于矩陣 $\|a_{ik}\|^{-1}$ 的轉置矩陣的元素，亦卽

$$a^{ik}=\frac{A_{ik}}{D}\ 或\ \|a^{ik}\|=(\|a_{ik}\|^{-1})^{*},$$

其中 D 是矩陣 $\|a_{ik}\|$ 的行列式，由于二次型(106)的正定性，D 是不等于零的，而 A_{ik} 是这行列式的元素 a_{ik} 的代数余子式。对元素 a^{ik} 我們有下面基本等式：

$$(113)\qquad \sum_{s=1}^{n}a^{is}a_{ks}=\begin{cases}0, & (i\neq k);\\ 1, & (i=k)。\end{cases}$$

將(112)的兩端乘以 a^{ji}，对 i 求和且改变第二項中求和的次序，由于(113)，我們得：

(114) $$x_j''+\sum_{p,q=1}^{n}\left\{{pq \atop j}\right\}x_p'x_q'=0,$$

其中

(115) $$\left\{{pq \atop j}\right\}=\sum_{i=1}^{n}a^{ji}\left[{pq \atop i}\right]。$$

在利用了关系式(110)之后尤拉方程取(111)的形式，而且这些方程業已不再相互依賴了。我們得以对 x_i'' 將它們解出。

作为例子，考察在任意柱面上的測地綫的問題。取 Z 軸与柱面的母綫平行，且設在平面 (x, y) 內的导綫是 $x=\varphi(\sigma)$，$y=\psi(\sigma)$，且取导綫的弧長作为参数 σ，因而

$$\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)=1。$$

取上面指出的 σ 及坐标 z 作为决定在柱面上的点的位置的參数坐标。这时

$$ds^2=d\sigma^2+dz^2,$$

因而在这情况下我們有：

$$a_{11}=a_{22}=1;\quad a_{12}=a_{21}=0。$$

方程(114)給出 $\sigma''=0$（当 $j=1$）及 $z''=0$（当 $j=2$），且导数是对弧長 s 取得的。这样一来，我們得到：

$$\sigma=As+B;\quad z=A_1s+B_1。$$

若 $A\neq0$，則我們可写这些曲綫的方程如形式 $z=C_1\sigma+C_2$，其中 C_1 及 C_2 是任意常数。这些曲綫的完整方程將是：

(116) $$x=\varphi(\sigma);\quad y=\psi(\sigma);\quad z=C_1\sigma+C_2,$$

它們都是螺旋綫，我們已在[II;127]中討論过。在 z 的表达式中的常数項自然不起任何作用。

74. 自然边値条件 到現在为止，在討論泛函(93)的極值时，我們曾用待求曲綫在端点固定作为边界条件，亦即已知 $y(x_0)$ 及 $y(x_1)$ 的值。現在指出另一形式的边界条件。設求积分

(117) $$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx$$

的極值，并且待求曲綫的左端点是固定的，亦即在左端点有边界条

件 $y(x_0)=y_0$，而沒有任何条件加到右端点，只不过这端点須位置在平行于 y 軸的直綫 $x=x_1$ 上，而这是原来就很明显的。我們此刻証明，这个自由端点应該也滿足某边界条件，而这边界条件可从积分(117)的極值条件直接获得。事实上，若某曲綫与一切有自由右端点的鄰近曲綫相比較給积分(117)以極值，則在右端点固定的条件下这条曲綫更是給积分(117)以極值。像我們前面指出的一样，其时它必滿足尤拉方程，亦卽它是积分(117)的極帶。現在轉到积分的一次变分的一般表达式[63]：

$$\delta J=[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx,\quad(\delta y=\alpha\eta)。$$

和前面一样，这个一次变分应等于零。含有积分的項应等于零，因为剛才我們指出，在这情况函数 $y(x)$ 应滿足尤拉方程。在积分外面的項当 $x=x_0$ 时应为零，因为这个端点是固定的。这样一来，由一次变分等于零导出当 $x=x_1$ 时 $F_{y'}\eta=0$。在自由端点处 η 可以是任意的，因而最后我們获得在自由端点的下面边界条件：

$$F_{y'}\big|_{x=x_1}=0。\tag{118}$$

这条件給出在自由端点 y 及 y' 之間的联系。不难檢驗，对积分(2_1)条件(118)有形式 $y'=0$，亦卽在积分(2_1)的情况，它归結到在端点 $x=x_1$ 处要求極帶与直綫 $x=x_1$ 正交。边界条件(118)通常被称作*自然边界条件*或*边值条件*。对于下积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\,y_1,\,y_1',\,\cdots,\,y_n,\,y_n')dx,$$

可重复上面的討論，我們得到在自由端点的 n 个边界条件

$$F_{y_i'}=0,\quad(i=1,\,2,\,\cdots,\,n)。$$

現在考察含有二阶导数的积分：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\,y,\,y',\,y'')dx。$$

如果注意到公式(22)及(23)，以及在自由端点处 $\eta(x)$ 及 $\eta'(x)$ 是

任意的这种情况，那末我們得到在自由端点的兩个自然边界条件：

$$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}=0;\quad F_{y''}=0。\tag{119}$$

我們注意，这兩个条件的第一个給出在自由端点处 $y,\ y',\ y''$, y''' 之間的联系。完全一样的，对于二重积分

$$J=\iint\limits_{B}F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)\,dx\,dy\tag{120}$$

在境界 l 上的自然边界条件有如下形式：

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}=0,\tag{121}$$

其中 s 是境界 l 的弧長。这可从对积分 (120) 的一次变分的公式 (26) 立即推出。

75. 更一般型的泛函 此刻考察泛函的一次变分，这泛函除了通常积分外还含有附加項，这些項依賴于函数在积分区間的端点或在积分区域的境界上的値。当研究这样泛函时，我們仍然得到以前的尤拉方程，因而在这泛函中附加項只对于自然边界条件的形式有所影响。引入了这些附加項，我們可获得不同形式的自然边界条件，这对于变分学在数学物理的应用上是很重要的。我們將只考虑个别情况。

作为第一个例子，考察泛函：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')\,dx-\varphi(y_0)+\psi(y_1),\tag{122}$$

其中 y_0 及 y_1 是函数 $y(x)$ 在积分区間的兩端点的已知值，而 $\varphi(y_0)$ 及 $\psi(y_1)$ 都是已知函数，并且在 $\varphi(y_0)$ 前的負号是为了以后便于計算。考虑鄰近曲綫 $y(x)+\alpha\eta(x)$，代入泛函中，对 α 微分，且令 $\alpha=0$，我們获得下面的一次变分表达式：

$$\begin{aligned}\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\delta y\,dx+\{\psi'(y_1)+F_{y'}[x_1,y_1,y'(x_1)]\}\delta y_1-\\-\{\varphi'(y_0)+F_{y'}[x_0,y_0,y'(x_0)]\}\delta y_0。\end{aligned}\tag{123}$$

如果某曲綫 $y(x)$ 在自由端点时給泛函(122)以極值，則在固定端点时它更給出極値，也就是，在上面公式中我們可認为 $\delta y_1=\delta y_0=0$，而由基本引理，$y(x)$ 应照例满足尋常尤拉方程。如果兩个端点都是自由的，則在公式(123)中 δy_1 及 δy_0 都是任意的，从而我們获得如下形式的边界条件：

$$\varphi'(y)+F_{y'}|_{x=x_0}=0;\quad \psi'(y)+F_{y'}|_{x=x_1}=0。$$

例如，令 $\varphi(y)=l(y-a)^2$，当 $x=x_0$ 时得到如下形式的自然边界条件：

$$\frac{1}{2l}F_{y'}|_{x=x_0}+y_0-a=0,$$

因而当取 $l\to\infty$ 时的極限，則有 $y_0=a$，亦卽导到固定端点的情况。

在二重积分的情形，我們取沿着积分的基本区域 B 的境界 l 的曲綫积分作为附加項，并且我們取从这境界 l 的某定点算起的弧長 s 作为这曲綫积分的自变量。我們假設在曲綫积分符号下的函数含有自变量 s，待求函数 u 以及它的切綫导数 u_s，也就是：

$$J=\iint\limits_B F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy+\int_l \Phi(s,u,u_s)\,ds。\tag{124}$$

进行尋常計算，导出一次变分的下面表达式：

$$\delta J=\iint\limits_B [F]_u\,\delta u\,dx\,dy+\int_l\Big(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}+ +\Phi_u-\frac{d}{ds}\Phi_{u_s}\Big)\delta u\,ds。\tag{125}$$

和前面一样的討論，可証明为了要函数 $u(x,y)$ 在自然边界条件下給泛函(124)以極值，必須要求函数 u 滿足尋常奥斯特洛格拉德斯基方程，且要求在境界 l 上滿足边界条件：

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}+\Phi_u-\frac{d}{ds}\Phi_{u_s}\Big|_l=0。\tag{126}$$

作为例子，考察泛函：

$$J=\iint_B (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy-\int_l p(s)u\,ds,$$

其中 $p(s)$ 是在 l 上的已知函数。在这情况，奥斯特洛格拉德斯基方程变成拉普拉斯方程，而边界条件有如下形式：

$$2u_x\frac{dy}{ds}-2u_y\frac{dx}{ds}+p(s)\Big|_l=0。$$

如果注意 $\frac{dx}{ds}$ 及 $\frac{dy}{ds}$ 是 l 的切綫的方向余弦，因而 $\frac{dy}{ds}$ 及 $\left(-\frac{dx}{ds}\right)$ 是 l 的外法綫的方向余弦，则可写边界条件如下形式：

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_l=-\frac{1}{2}p(s)。$$

这样一来，当区域的境界上的法綫导数的值为已知时，我們导向拉普拉斯方程的求解問題，亦即諾伊曼問題。如果我們选取

$$\Phi=p(s)u+q(s)u^2,$$

则得到如下形式的边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n}+q(s)u\Big|_l=-\frac{1}{2}p(s)。$$

我們注意只影响到自然边界条件而不改变尤拉方程及奥斯特洛格拉德斯基方程的另一个可能性。这可能不借助于添置附加項到泛函上如我們前面作过的那样，而是借助于在积分号下的函数上添加这样的式子使它不影响尤拉方程或奥斯特洛格拉德斯基方程。我們在[66]中曾經作出过这样的式子。例如，如果我們代替下积分：

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

来考察另一积分：

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F+A(x,y)+B(x,y)y'\right)dx,$$

其中 $A_y=B_x$，则尤拉方程沒有改变，而代替自然边界条件 $F_{y'}=0$

的是 $F_{y'}+B=0$。

对于多重积分的情形也可用类似方式来处理。

76. 一次变分的一般形式 到現在为止，在确定一次变分时我們曾假設积分区間或区域不变的。現在我們不作这个假設而引出一次变分的表达式。它給我們研究在变端点的一般情况时变分学的基本問題的可能性。首先我們考察最簡單的积分，亦即积分(117)。以前我們認为鄰近曲綫 $y(x)+\alpha\eta(x)$ 不同于基本曲綫 $y(x)$ 的是附加項 $\alpha\eta(x)$。此刻我們假設鄰近曲綫是任何含有参数 α 的 $y(x,\alpha)$，并且基本曲綫是当 $\alpha=0$ 时而获得的 $y(x)=y(x,0)$，对这样的鄰近曲綫我們也来計算积分的变分。因此，考察积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{127}$$

且在这积分中引入变动的鄰近曲綫，而且假定积分的上下限也依賴于 α：

$$J(\alpha)=\int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)}F[x,y(x,\alpha),y_x(x,\alpha)]dx, \tag{128}$$

并且当 $\alpha=0$ 时，我們有在积分(127)中出現的函数及积分的上下限：

$$y(x,0)=y(x);\quad x_1(0)=x_1;\quad x_0(0)=x_0。$$

按照一般定义变分是对 α 的导数在 $\alpha=0$ 的值与 α 的乘积，則可写：

$$\delta x_0=\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\alpha;\quad \delta x_1=\frac{dx_1(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\alpha;\quad \delta y=\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\alpha,$$

$$\delta y'=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial x}\right]\bigg|_{\alpha=0}\alpha=\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha=\frac{d}{dx}\delta y,$$

并且我們假設 $y(x,\alpha)$ 有到二阶的連續导数。对积分(128)取对 α 的导数，在其中令 $\alpha=0$ 且乘以 α，則我們得到积分的一次变分的下面表达式：

$$\delta J=F(x_1,\ y_1,\ y_1')\delta x_1-F(x_0,\ y_0,\ y_0')\delta x_0+\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')dx$$

或

(129) $$\delta J=[F(x,\ y,\ y')\delta x]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')dx_{\circ}$$

照例,应用分部积分法將积分的第二項变形:

(130) $$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'\,dx=\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\frac{d}{dx}\delta y\,dx=$$

$$=F_{y'}(x_1,y_1,y_1')(\delta y)_1-F_{y'}(x_0,y_0,y_0')(\delta y)_0-\int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{d}{dx}F_{y'}dx,$$

其中 $(\delta y)_1$ 及 $(\delta y)_0$ 都是函数 y 的变分的边界值:

(131) $$(\delta y)_i=\left[\frac{\partial y(x_i,\ \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha,\quad (i=0,\ 1)^{㊀}{}_{\circ}$$

現在求曲綫在端点的縱标的一次变分,并且我們只对右端点的縱标 y_1 进行全部計算。显然,有:

$$y_1=y[x_1(\alpha),\ \alpha],$$

且当 α 改变时,函数 y 中的兩个变量都將改变,而不像在确定 $(\delta y)_1$ 时仅第二个变量有所改变的情况一样.因而縱标 y_1 的一次变分 δy_1 將是:

(132) $$\delta y_1=\left[\frac{d}{d\alpha}y[x_1(\alpha),\alpha]\right]_{\alpha=0}\alpha=$$

$$=\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha+\left[\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha=y_1'\delta x_1+(\delta y)_1,$$

其中 y_1' 是曲綫在右端点的切綫的角系数。类似情况,对曲綫的左端点的縱标的变分 δy_0 有:

(133) $$\delta y_0=y_0'\,\delta x_0+(\delta y)_{0\,\circ}$$

將(130)中的 $(\delta y)_1$ 及 $(\delta y)_0$ 用方程(132)及(133)中它們的值来代入,得到对于积分(127)的一次变分的最后表达式:

㊀ 譯者注: 原書中的此式及以后的 f 現在都改作 y, 这样可与以前的符号一致。又原書 $(i=1,\ 2)$, 此处改作 $(i=0,1)$, 以便与原設一致。

(134) $$\delta J=[F(x_1, y_1, y_1')-y_1'F_{y'}(x_1, y_1, y_1')]\delta x_1+ +F_{y'}(x_1, y_1, y_1')\delta y_1-[F(x_0, y_0, y_0')-y_0'F_{y'}(x_0, y_0, y_0')]\delta x_0- -F_{y'}(x_0, y_0, y_0')\delta y_0+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx$$

或

(135) $$\delta J=[(F-y'F_{y'})\delta x+F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx。$$

所写等式的右端关于 δx_i 及 δy_i 是綫性的，因而当鄰近曲綫依賴于多个参数时它也保存自己的意义，并且在这情况，如果所考察的曲綫是从依賴于 n 个参数的曲綫族中当 $\alpha_i=0\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 时而得到的，則一次变分应認作是对所指的那些参数的始值来計算的一阶全微分，亦卽：

(136) $$\delta J=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0}\alpha_i。$$

在依賴于 n 个未知函数的积分：

(137) $$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y_1, y_1', \cdots, y_n, y_n')dx$$

的情况，完全和上面一样来計算，导得一次变分的下面公式：

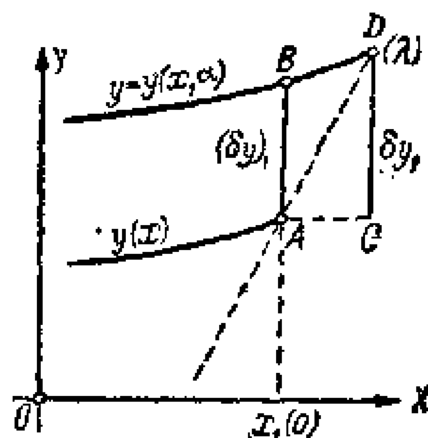
$$\delta J=\left[F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right]_{x=x_1}\delta x_1+\sum_{i=1}^{n}[F_{y_i'}]_{x=x_1}\delta y_i^{(1)}- -\left[F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right]_{x=x_0}\delta x_0-\sum_{i=1}^{n}[F_{y_i'}]_{x=x_0}\delta y_i^{(0)}+ +\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_1}\left(F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}\right)\delta y_i\,dx$$

或

(137₁) $$\delta J=\left[\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\delta x+\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\delta y_i\right]_{x=x_0}^{x=x_1}+ +\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x_1}\left(F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}\right)\delta y_i\,dx,$$

其中 δx_0, δx_1, $\delta y_i^{(0)}$, $\delta y_i^{(1)}$ 是曲綫在端点的坐标的变分。

我們闡明在公式(132)中引进的 δy_1 及 $(\delta y)_1$ 的值在几何上的区别。用来比較的曲綫 $y=y(x, \alpha)$ 的右端点的坐标是：$x_1(\alpha)$ 及 $y_1(\alpha)=y[x_1(\alpha), \alpha]$。当 α 改变时，右端点描出某曲綫 λ。α 的始值是 $\alpha=0$，因此 α 值本身就是这参数从 $\alpha=0$ 开始的改变量。按照(132)，δy_1 是函数 $y_1(\alpha)=y[x_1(\alpha),\alpha]$ 关于变量 α 的微分，亦即 δy_1 是右端点的縱标的改变量的主要部份。在圖二中，这改变量由綫段 CD 来表示它。按照(131)，$(\delta y)_1$ 是函数 $y[x_1(0),\alpha]$ 关于 α 的微分，并且在計算微分以前就在第一变数 $x_1(\alpha)$ 内令 $\alpha=0$。这样一来，$(\delta y)_1$ 是当基本曲綫 $y(x)$ 移到比較曲綫 $y=y(x, \alpha)$ 时在端点 $x_1(0)$ 的縱标的改变量的主要部份。在圖二中，这改变量由綫段 AB 来表示它。



(圖二)

77. 横截条件 在討論自然边界条件时，我們曾假定極帶的端点可在与 y 軸平行的直綫 $x=x_0$ 或 $x=x_1$ 上移动。現在設它們可在平面 (x, y) 上的任何已知曲綫 λ 上移动。为明确起見，假設左端点 (x_0, y_0) 是固定的，而右端点在 λ 上移动。和上面的討論一样，我們証明，若某曲綫 $y(x)$ 給积分以極值，則它应滿足尤拉方程，亦即它是極帶。一次变分应为零：由于尤拉方程，含有积分号的項是等于零的，而由于左端点固定在积分号外的項当 $x=x_0$ 时等于零。这样一来，由于一次变分等于零导出在变端点的下面的条件：

$$[F(x, y, y')-y'F_{y'}(x, y, y')]\delta x+F_{y'}(x, y, y')\delta y=0, \tag{138}$$

其中 δx 及 δy 是沿曲綫 λ 的無穷小位移在坐标軸上的射影。如果假設兩个端点都是变动的，則获得在兩端点的边界条件(138)。这里应該回忆的是，如果在变端点时曲綫給积分以極值，則当兩端点不变或一个端点不变时它更是給积分以極值，那末只須重复以前

的討論就行了。

用 $\bar{y}'=\dfrac{\delta y}{\delta x}$ 記曲綫 λ 的切綫的角系数，条件 (138) 可写如下形式：

$$F(x, y, y')+(\bar{y}'-y')F_{y'}(x, y, y')=0。\tag{139}$$

这个条件通常叫做横截条件。这样一来，我們看出这条件建立了極带的切綫的角系数 y' 和曲綫 λ 的每一点的切綫的角系数 $\bar{y}'$ 之間的一个关系。如果 λ 的方程是由隐式 $\varphi(x, y)=0$ 給出的，則横截条件可写作如下形式：

$$\frac{F-y'F_{y'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y'}}{\varphi_y}。\tag{140}$$

考察三維空間的横截条件。基本积分將有形式：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y', z, z')dx。\tag{141}$$

注意公式 (137_1) 且完全和上面一样的討論，如果其中一个端点在已知曲面 S 上移动，那末我們得到这端点应滿足的横截条件：

$$(F-y'F_{y'}-z'F_{z'})\delta x+F_{y'}\delta y+F_{z'}\delta z=0,\tag{142}$$

其中 δx, δy, δz 是沿曲面 S 的無穷小位移的分量。所写出的条件無异于是 δx, δy, δz 的系数应与 S 的法綫的方向余弦成正比。

若曲面的方程給出如隐式 $\varphi(x,y,z)=0$，則横截条件(142)显然可写作如下形式：

$$\frac{F-y'F_{y'}-z'F_{z'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y'}}{\varphi_y}=\frac{F_{z'}}{\varphi_z}。\tag{143}$$

它給出联系着 x, y, z, y', z' 的兩个关系式。这兩个关系式代替了在固定端点情况的兩个条件 $y(x_0)=y_0$; $z(x_0)=z_0$。

在一般情况，积分(137)的極带是在 $(n+1)$ 維空間 $(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 內的曲綫，而如果它的端点在已知超曲面 $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)=0$ 上移动，則这端点应服从下面的横截条件：

$$(144) \qquad \left(F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right)\delta x+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\delta y_i=0$$

或

$$(145) \qquad \frac{F-\sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}}{\varphi_x}=\frac{F_{y_1'}}{\varphi_{y_1}}=\cdots=\frac{F_{y_n'}}{\varphi_{y_n}}。$$

現在指出一个特殊情况。設基本积分有形式：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x,\ y,\ z)}dx=\int_{x_0}^{x_1} n(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

它是与几何光学問題相对应的。在这情况，我們証明横截条件(145)是与正交条件一致的，也就是，这条件要求極帶正交于曲面 S。在条件(145)中代入 $F=n\sqrt{1+y'^2+z'^2}$，且进行簡化，得：

$$1:\varphi_x=y':\varphi_y=z':\varphi_z。$$

但 $1, y', z'$ 是与極帶的切綫的方向余弦成正比，而 φ 的偏导数是与曲面 S 的法綫的方向余弦成正比，因而所写的等式表示上面指出的正交条件。对于在平面上的积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1} n(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

也發生类似情况，只要將曲面 S 代以在平面 $(x,\ y)$ 上的曲綫 λ。

还要注意，如果把在积分(141)中的曲綫 $y(x), z(x)$ 的方程变为参数形式，因而积分号下的函数將有形式 $\Phi(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z')$，则不难驗証条件(145)可写作如下形式：

$$(146) \qquad \frac{\Phi_{x'}}{\varphi_x}=\frac{\Phi_{y'}}{\varphi_y}=\frac{\Phi_{z'}}{\varphi_z}。$$

78. 标准变量 横截条件在变分学中的極值問題的几何理論上占有很重要的地位，我們就来說明它。在尤拉方程中我們預先施行变量替换，也就是变到所謂标准变量。从三維情形着手，其时基本积分有如下形式：

(147) $$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y',\ z,\ z')dx。$$

对于这个积分的尤拉方程：

(148) $$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0;\ F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$

是含两个二阶方程的方程組。由下列公式引进新变量 v 及 w 来代替 y' 及 z'：

(149) $$v=F_{y'};\quad w=F_{z'};$$

并且假設所写的方程是可就 y' 及 z' 解出的，亦即相应的函数行列式不等于零：

$$\frac{D(F_{y'},\ F_{z'})}{D(y',\ z')}\neq 0。$$

代替 F 还引进新函数 H：

(150) $H(x,\ y,\ z,\ v,\ w)=y'v+z'w-F=y'F_{y'}+z'F_{z'}-F$,

因而認为这个新函数可用新变量 v 及 w 表达。我們現在确定函数 $H(x,\ y,\ z,\ v,\ w)$ 对它的四个变量的偏导数：

$$H_y=\frac{\partial y'}{\partial y}v+\frac{\partial z'}{\partial y}w-F_y-F_{y'}\frac{\partial y'}{\partial y}-F_{z'}\frac{\partial z'}{\partial y},$$

或者由(149)：

(151) $$H_y=-F_y。$$

同样，借助于簡單微分法，得：

(152) $$H_z=-F_z;\ H_v=y';\ H_w=z'。$$

这样一来，代替两个二阶方程(148)，在新变量之下我們可写出对于自变量 x 的函数 $y,\ z,\ v,\ w$ 的四个一阶方程：

(153) $$\frac{dy}{dx}=H_v;\ \frac{dz}{dx}=H_w;\ \frac{dv}{dx}=-H_y;\ \frac{dw}{dx}=-H_z。$$

方程組(153)通常称作标准方程組。从公式(150)及(152)立即获得用函数 H 来表达泛函的积分号下的函数 F：

(154) $$F=vH_v+wH_w-H。$$

方程組(148)或(153)的通积分含有四个任意常数。当微分方程的存在及唯一性定理的通常条件滿足时，通过空間(x,y,z)的任何点可引出具有任意給定初始导数y'及z'的一束極帶。这極帶束是依賴于兩个任意常数的曲綫族，也就是依賴于上面提及的导数的初始值。一般我們称依賴于兩个任意常数且互不相交地充滿某部份空間的尤拉方程的解的全体为極帶族，也就是，通过这部份空間的每一点有極帶族中一条且只一条極帶經过。这样一来，当存在着这样的極帶族时，在每一点我們有确定的值y'及z'，从而在充滿所說的極帶族的部份空間中的每一点，我們有确定的值v及w，就是說，我們可認为在充滿極帶族的部份空間中，v及w可看作坐标(x, y, z)的函数。这些函数$v(x, y, z)$及$w(x, y, z)$称为上面指出的極帶族的傾斜函数。現在証明，这些函数应滿足包含它們的偏导数的某些方程。事实上，自变量x的四个函数：

$$y(x),\ z(x),\ v[x,\ y(x),\ z(x)],\ w[x,\ y(x),\ z(x)]$$

应滿足方程組(153)。

在这方程組的后面兩方程中，將全导数dv/dx及dw/dx用它們的表示式来代，则可写这些方程为以下形式：

(155) $$v_x+v_y\frac{dy}{dx}+v_z\frac{dz}{dx}=-H_y;\quad w_x+w_y\frac{dy}{dx}+w_z\frac{dz}{dx}=-H_z。$$

現在利用方程組(153)的其余兩个方程，于是得到傾斜函数$v(x, y, z)$及$w(x, y, z)$应滿足的偏微分方程組：

(156) $$v_x+v_yH_v+v_zH_w=-H_y;\quad w_x+w_yH_v+w_zH_w=-H_z。$$

反之，現在設$v(x, y, z)$及$w(x, y, z)$不作为某極帶族的傾斜函数，而簡單地只是方程組(156)的某个解。將这些函数代入方程組(153)的前兩个方程的右端，我們得到关于y及z的兩个一阶方程。在这方程組求积的結果中，y及z是x及兩个任意常数的函

数。將这些表达式 $y(x, C_1, C_2)$ 及 $z(x, C_1, C_2)$ 代入函数 $v(x,y,z)$ 及 $w(x, y, z)$ 中，則这兩个函数也可用 x 及兩个任意常数来表达。

不难証明，这时它們也满足方程組(153)的后面兩个方程。事实上，利用复合函数求导数的規則及方程組(153)的前兩个方程，我們可写：

$$\frac{dv}{dx}=v_x+v_yH_v+v_zH_w,$$

从而，由方程組(156)的第一式，我們得到方程 $\frac{dv}{dx}=-H_y$。完全相同的証明对方程組(153)的最后方程也是有效的。

若極帶 $y(x, C_1, C_2)$ 及 $z(x, C_1, C_2)$ 互不相交地充满某部份空間，亦即成为極帶族，則我們取方程組(156)的任意解作为这族的函数 v 及 w，它們將是这極帶族的傾斜函数。这样一来，我們証明了这个事实，如果有了方程組(156)的解，那末我們可構成相应的極帶族，对于这極帶族来說，方程組(156)的这个解是它的傾斜函数。这时我們自然只限于 $y(x, C_1, C_2)$ 及 $z(x, C_1, C_2)$ 是它的極帶族的空間的那个部份，也就是，这極帶族互不相交而充满了的空間那一部份。

还要注意，在标准变量之下横截条件变成什么样子。对原来的变量它是条件(142)。应用公式(150)及(152)，我們可写横截条件如下形式：

$$-H\delta x+v\delta y+w\delta z=0。\tag{157}$$

79. 在三維空間內的極帶場 现在我們轉到对积分(147)的几何理論的叙述。

我們將考察特殊極帶族，此刻就来定义它。設 l 是空間的某曲綫。我們称积分(147)沿着这曲綫所取的值为它的拟似長度或 J-長度。比方說，相应于几何光学問題的积分(2)的拟似長度

就表示时間，在这时間內，空間的动点以給定的速度 $v(x, y, z)$ 走过曲綫 l。

我們考察从空間的一个定点 M_0 引出的極帶束，且設这極帶束在 M_0 点的某鄰域內成为極帶族，亦即，在这鄰域內極帶束除了在 M_0 点而外互不相交。在每一極帶上从 M_0 点起取这样的弧 M_0M，使对于所有極帶这弧的拟似長度等于同一个数 ρ。点 M 的几何軌迹將給出某曲面，我們称它为以 M_0 为中心的拟似球面。如果改变 ρ 这个数，我們得到拟似球面族，这族依賴于一个参数且充滿 M_0 点的某鄰域。不难看出，我們的極帶族与拟似球面橫截地相交，也就是說，在 M_0 点的某鄰域內的每一点，我們的極帶族的傾斜函数 $v(x, y, z)$ 及 $w(x, y, z)$ 將滿足橫截条件(157)，其中 δx, δy, δz 是沿着經过所指点的拟似球面的無穷小位移的分量。

事实上，回到在一般情况下表示泛函(147)的变分的公式：

$$\delta J=[-H\delta x+v\delta y+w\delta z]_{x=x_0}^{x=x_1}+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y+\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)\delta z\right]dx, \tag{158}$$

且設極帶束的端点 M 沿拟似球面变动。这时泛函 J 的值按作法保持常数，因而 $\delta J=0$。在公式(158)的右端中的积分項变为零，因为所取曲綫是極帶；又积分号外的項在下限处为零，因为 M_0 点是固定的，故在这点 $\delta x=\delta y=\delta z=0$，因此在积分号外的項在上限也应为零，亦即，沿拟似球面变动的点 M 应滿足橫截条件(157)。我們指出，極帶束的全体依賴于兩个任意常数，而 M 点沿拟似球面的变动归結为这些常数的改变，在这里这兩个常数起着我們在 [78] 中講过的参数的作用。

設 M 是 M_0 点的鄰域內的某一点。我們有連接 M_0 及 M 二点的确定極帶，且积分 (147) 沿着这極帶的弧 M_0M 的值是 M 点

的坐标 (x, y, z) 的确定函数 $\theta(x, y, z)$。这时拟似球面族的方程显然是：

(159) $$\theta(x, y, z)=\rho,$$

其中 ρ 是上面所講过的参数。我們通常說，从 M_0 点引出的極带束構成中心極帶場。上面提到过的拟似球面称为这場的横截曲面，而函数 θ 是場的基本函数。

现在轉到一般極帶場的構造。設 S_0 是三維空間的某曲面。在这曲面上的每一点，横截条件 (142) 确定在这点的 y', z' 或横截条件(157) 确定这点的 v 及 w。如果取这些值 y' 及 z' 作为导数的初始值，則我們可从曲面 S_0 的每一点作出極帶，它与曲面 S_0 横截地相交。如果对曲面 S_0 的每一点都作成这样極帶，則我們得到依賴于兩个参数的極帶的全体，它与曲面 S_0 横截地相交。設在这曲面的某鄰域內所指的極帶的全体作成極帶族，亦即互不相交。在族中的每一極帶上从在曲面 S_0 上的点 M_0 起截取弧 M_0M，使积分(147)沿这極帶弧有給定的值 ρ。这些弧的端点 M 的几何軌迹給出某曲面 S。

不难看出，我們的極帶族与这个曲面 S 横截地相交。事实上，只須重复前面的中心場的討論。誠然，在这里 M_0 点不是不动点而是沿着曲面 S_0 上变动的，然而由于我們的極帶族的構造，它是与 S_0 横截地相交，因此在公式 (158) 的右端的积分号外的項在下限处为零，这和中心場的情况完全一样。这样一来，充滿曲面 S_0 的鄰域的部份空間的曲面 S 与構成的極帶族横截地相交。在这情况，我們也称極帶族为極帶場，而曲面 S 都是这場的横截曲面。于是，若存在依賴于一个参数的曲面族且与極帶族横截地相交，則这極帶族是極帶場。积分(147)沿着上面提到过的極帶場的弧 M_0M 的值是 M 点的坐标的函数 $\theta(x, y, z)$，因而方程(159) 是場的横截面族的方程。特別当 $\rho=0$ 时我們有曲面 S_0 的方程。在相应于几

何光学問題的积分的情况，中心場的拟似球面是在不同时刻 M_0 点的局部扰动的波的前陣面。在一般情况，当 S_0 是在开始时刻的波的前陣面的条件下，横截曲面 S 也給出在不同时刻的波的前陣面。

在横截曲面 S 上的每一点横截条件 (157) 中 δx, δy, δz 的系数应与曲面 S 的法綫的方向余弦成比例。从另一方面，如所周知，这方向余弦与方程(159)的左端对坐标的偏导数成比例，亦即，这些偏导数应与横截条件(157)中的系数成比例。然而，我們此刻来証明会發生这样可注意的事实，就是在这里它們不是成比例而恰是相等的，亦即：

$$(160)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-H(x,\ y,\ z,\ v,\ w);\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=v;\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=w,$$

并且在写出的公式中，自然認为 v 及 w 是 (x, y, z) 的函数。它們是前节中已經提过了的場的傾斜函数。我們就要証明的这个断言可从基本公式(158)直接推得。

为了明晰起見，首先考慮中心場的情况。我們在前面已經說过，在这里 $\theta(x, y, z)$ 是积分(147)沿着中心場的極帶弧 M_0M 的值。

設端点 M 已不再沿着拟似球面変动，如我們前面作过的，而是在空間内任意変动。一般地講，这时連接 M_0 及动点 M 的場的極帶自然也随着改変。在这情况，M 点的変动將不是依賴于兩个参数，像上面沿着拟似球面変动一样，而是依賴于某三个参数，我們并不去固定它們。用 δ 記关于这些参数的改変的微分。回到基本公式(158)，由于前面所說的，我們可將积分 J 的值以函数 $\theta(x,y,z)$ 来代替。这公式的右端的积分項由于沿極帶取积分而消失。在积分号外的項在下限处也变为零，因为 M_0 点是固定的。然而积分号外的項在上限处業已不为零，因为 M 点不沿拟似球面变动而是

任意变动，因而我們有等式：

(161) $$\delta\theta(x, y, z) = -H\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z,$$

从而显出公式(160)。

对于任何場也可完全一样地进行这些公式的証明。代替拟似球面的有曲面 S，且在公式(158)的右端中积分号外的項在下限处仍旧变为零，因为曲面 S_0 与場的極帶横截地相交。

如果从(160)的三个方程中消去 v 及 w，我們就得到場的基本函数的一阶偏微分方程：

(162) $$\theta_x + H(x, y, z, \theta_y, \theta_z) = 0。$$

这样一来，任何場的基本函数原来应满足同一个方程(162)。現在証明它的反面，卽一般地說，方程(162)的任何解是某場的基本函数。

設 $\theta^{(0)}$ 是方程(162)的某一个解。函数 v 及 w 确定如下式：

(163) $$v = \theta_y^{(0)};\quad w = \theta_z^{(0)}。$$

对 y 及 z 微分恒等式

(164) $$\theta_x^{(0)} + H(x, y, z, \theta_y^{(0)}, \theta_z^{(0)}) = 0,$$

我們得到(156)中兩个方程，也就是，如上面看过的，我們作出的函数 v 及 w 对应于某極帶族，它們是这極帶族的傾斜函数。由(163)及(164)，方程(157)的左端是函数 $\theta^{(0)}$ 的全微分，亦卽 $\theta^{(0)}(x, y, z) = C$ 是上面提到的極帶族的横截曲面族，这样一来，这个極帶族成为場。由(161)，方程(157)的左端在这里是場的基本函数的全微分，于是函数 $\theta^{(0)}$ 是上面提到的場的基本函数。还要注意，从上面推出，極帶族成为場的必要且充分的条件是：方程(157)的左端是全微分，亦卽要求这左端的曲綫积分不依賴于积分路徑。

在与几何光学的基本問題相对应的积分的情况，横截条件(142)有如下形式：

$$\left(n\sqrt{1+y'^2+z'^2}-n\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-n\frac{z'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)\delta x+$$

$$+n\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\delta y+n\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\delta z=0,$$

或，經过明显簡化之后：

$$\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z=0,$$

从而立即推知，在这里横截条件与正交条件一致，因而任何場的横截曲面与这場的極帶正交。在这情况，标准变量及函数 H 由下面等式确定：

$$v=\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}};\ w=\frac{nz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}};$$

$$H=\frac{ny'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\frac{nz'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-n\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

或者經簡化后：

$$H=-\frac{n}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=-\sqrt{n^2-v^2-w^2},$$

而方程(162)有形式：

$$\theta_x-\sqrt{n^2-\theta_y^2-\theta_z^2}=0$$

或

$$\theta_x^2+\theta_y^2+\theta_z^2=n^2(x,\ y,\ z)。$$

如果 $n=$常数，則空間是均匀的，因而極帶是直綫。当極帶族的極帶是某曲面 S_0 的法綫时且仅当此时，它們成为場。在这些法綫上取相同長度的綫段，我們得到場的其他横截曲面 S_0。如果作出中心在 S_0 上且有固定半徑的球面族，且取这球面族的包面，則可得到这些横截曲面（惠更斯構圖）。如果用拟似球面代替球面，則对非均匀的空間，这構圖也保持有效。还要指出，在[**II**; **128**]中已闡明了直綫族是某曲面的法綫族的条件。

80 一般情况的場的理論 所叙述的几何理論在平面的情况也保持正确的，这时基本积分有如下形式：

(165) $$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')dx。$$

由公式$u=F_{y'}$引入新变量u以代替y'，也引入函数$H(x,y,u)=$ $=y'F_{y'}-F$。代替积分(165)的尤拉方程將是含兩个一阶方程的方程組：

(166) $$\frac{dy}{dx}=H_u;\quad \frac{du}{dx}=-H_y。$$

而横截条件：

(167) $$(F_y-y'F_{y'})\delta x+F_{y'}\delta y=0$$

在新变量之下將有形式：

(168) $$-H\ \delta x+u\ \delta y=0。$$

在平面上的極帶族应含有一个参数，并且認为它互不相交地复盖着部份平面。在这部份平面内y'及新变量u是点的坐标$(x,\ y)$的确定的函数（u是族的傾斜函数）。至于横截条件(168)，它可看作确定極帶族的横截曲綫的一阶微分方程，也就是确定与族中的極帶横截地相交的曲綫的微分方程：

(169) $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{H}{u}。$$

在这里我們有如下特点，即任何極帶族总是構成場。这时，自然假定保証方程(169)的存在及唯一性定理的条件已經滿足。

現在来講任何維数空間的一般情况的場論。此处我們將不予以証明，因为它和三維空間所作的証明是完全类似的。在这情况，基本积分將含有自变量x的n个函数q_1、q_2、…，q_n以及它們的导数q_k'：

(170) $$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ q_1,\ q_1',\cdots,\ q_n,\ q_n')dx。$$

相应的極帶是从含 n 个二阶方程的方程組：

$$F_{q_k}-\frac{d}{dx}F_{q'_k}=0,\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{171}$$

来确定的。代替 q'_k 引入新变量 p_k：

$$p_k=F_{q'_k}, \tag{172}$$

并且認为函数行列式

$$\frac{D(F_{q'_1},\cdots,F_{q'_n})}{D(q'_1,\cdots,q'_n)} \tag{173}$$

不等于零，亦即方程(172)就 q'_k 是可解出的。

我們假設用变量 (x, q_k, p_k) 表示的函数 H 由下式确定：

$$H(x,q_k,p_k)=\sum_{s=1}^{n}q'_sp_s-F_{\circ} \tag{174}$$

直接微分且利用(172)，得：

$$H_{q_k}=-F_{q_k};\quad H_{p_k}=q'_k,$$

而方程組(171)可写作 $2n$ 个一阶方程的形式(标准組)：

$$\frac{dq_k}{dx}=H_{p_k};\quad \frac{dp_k}{dx}=-H_{q_k}\circ \tag{175}$$

借助于积分(170)可在有坐标 $(x, q_1, \cdots, q_n)$ 的 $(n+1)$ 維空間内确定任何曲綫的拟似長度的概念。如果依賴于 n 个任意常数的極帶的全体充滿着 $(n+1)$ 維部份空間且互不相交，則称这些極帶構成了極帶族。在所指的部份空間中 q'_k 且因之 p_k 是点的确定函数，亦即是变量 $(x, q_1, \cdots, q_n)$ 的函数(族的傾斜函数)。像三維空間一样，也可逐字逐句地照样确定中心場。为了获得一般場，选取某超曲面 $S_0:\varphi(x, q_1, \cdots, q_n)=0$。在 S_0 上的每一点横截条件給出 n 个关系以确定导数 q'_k 的值；如果用这些值作为在方程組(171)求积时的初始值，一般地講則我們得到極帶族，它与 S_0 横截地相交。和三維情况完全一样，可構造与極帶族横截地相交的其他曲面 S，因而这極帶族構成了場。在每一个場内存在基本函数

$\theta(x, q_1, \cdots, q_n)$，比方对中心場来說，这函数給出沿場的極帶从场的中心点 M_0 到变点的积分的值。对任何場也相似地定义基本函数。对任意选擇的場，关于基本函数我們有：

$$\theta_x = -H;\ \theta_{q_k} = F_{q'_k} = p_k;$$

并且这基本函数应滿足偏微分方程：

$$\theta_x + H(x, q_1, \cdots, q_n, \theta_{q_1}, \cdots, \theta_{q_n}) = 0。\tag{176}$$

反之，一般地講，这方程的任何解是某場的基本函数，并且对应于这場的函数 (172) 由公式 $p_k = \theta_{q_k}$ 确定。当且仅当 p_k 是某个場的傾斜函数时，表达式

$$-H\,\delta x + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta q_k$$

是全微分，因而这时上面的式子是場的基本函数 $\theta(x, q_1, \cdots, q_n)$ 的全微分。

81. 特殊情况　当作标准变量的变换时，我們注意一个重要的特殊情況。設 F 是关于导数 q'_k 的一次齐次函数，例如，在参数形式的变分問題中这情况是会發生的。按对齐次函数的尤拉公式，有：

$$\sum_{s=1}^{n} q'_s F_{q'_s} = F。\tag{177}$$

对 q'_k 微分这恒等式，得到：

$$\sum_{s=1}^{n} q'_s F_{q'_s q'_k} = 0,$$

因而这齐次方程組的行列式应等于零。然而这恰好就是行列式 (173)，为了要有可能变为标准变量，它又应当不等于零。从恒等式(177)立即推知，在这里函数 H 恒等于零。和从前一样，我們还可定义極帶場的概念，且对任何場有基本函数 $\theta(x, q_1, \cdots, q_n)$，它的偏导数从下面等式确定：

$$(178)\qquad \theta_x = F - \sum_{s=1}^{n} q'_s F_{q'_s} = 0; \quad \theta_{q_k} = F_{q'_k}。$$

从这些方程的第一个指出基本函数不含有 x。方程 $\theta_{q_k}=F_{q'_k}$ 的右端都是 q'_k 的零次齐次函数，因而从这些方程可用导数 θ_{q_k} 来表示比式 $\frac{q'_k}{q'_1}(k=2, \cdots, n)$。將这些表达式代入方程(177)，在这情况下，得到偏微分方程来代替方程(176)。

对于表示 n 維空間的曲綫的長度的积分：

$$(179)\qquad J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q'_i q'_k}\, dx$$

来进行一切計算，此处系数 a_{ik} 滿足关系 $a_{ik}=a_{ki}$ 且是变量 q_k 的已知函数。在这情况，我們有：

$$\theta_{q_k} = F_{q'_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{ks} q'_s}{F}, \quad \left(F = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q'_i q'_k}\right),$$

从而

$$\frac{q'_k}{F} = \sum_{s=1}^{n} A_{ks} \theta_{q_s},$$

其中用 A_{ik} 記矩陣 a_{ik} 的逆矩陣的元素[III$_1$;25]。

將 $\frac{q'_k}{F}$ 的表达式代入方程(177)，得到要找的偏微分方程：

$$(180)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \theta_{q_i} \theta_{q_k} = 1,$$

而对积分(179)的任何極帶場的基本函数应滿足这方程。

积分(179)沿場的極帶在兩点 M_0 及 M 的值給出在这兩点間的測地距离，因之我們得到在任何場内对这距离的平方 $\Gamma=\theta^2$ 的偏微分方程：

$$(181)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \Gamma_{q_i} \Gamma_{q_k} = 4\Gamma。$$

在这問題内自变量是参数，它是可以完全任意选擇的并且它不出現在系数 a_{ik} 及函数 θ 中。在这情况，我們也可考慮在 n 維空間 $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 内的場及基本函数。在这空間内可取一个变量作为自变量，而在这里方程(180)是所写方程(176)的对称形式。

在几何光学的基本問題的情形，当以参数形式写出时，我們有：

$$F = n(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

因之方程(180)有形式：

$$\theta_x^2+\theta_y^2+\theta_z^2=n^2(x,\ y,\ z)。$$

以前我們曾从基本积分的这个形式出發来得到这方程，在其中变量 x 起着自变量的作用。

在前面叙述的全部理論中，我們沒有假設自变量 x 不出現在积分号下的函数 F 中。在与积分(179)相对应的測地綫問題里，a_{ik} 不含有自变量，因而可另外来对待它。如在[73]中一样，用 φ 記在公式(179)中的根号下的式子，且用弧長作为參数，亦即引进关系式

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}q_i'q_k'=1,$$

我們得到微分方程組(111)：

$$\varphi_{q_i}-\frac{d}{ds}\varphi_{q_i'}=0,\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

且对这方程組可进行通常形式的标准变量的变换，也就是引入新变量 $p_i=\varphi_{q_i'}$ 来代替 q_i'。

函数 H 由等式确定：$H(q_k,\ p_k)=\sum\limits_{s=1}^{n}q_s'p_s-\varphi$，且由于 φ 是关于 q_s' 的二次齐次多項式，立即得着 $H=\varphi$。如果用 q_k 及 p_k 表示 φ 且將 $p_k=\theta_{q_k}$ 代入关系式 $\varphi=1$，我們就得到对于 θ 的偏微分方程。为明显起見，用 ψ 記由 q_k 及 p_k 表达的函数 φ，我們有标准方程組：

$$\frac{dq_k}{ds}=\psi_{p_k};\quad \frac{dp_k}{ds}=-\psi_{q_k},\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

注意到 $\psi(q_k,\ p_k)$ 是关于 p_k 的二次齐次多項式，我們可以断言，在所写的方程中若同时以 αp_k 代替 p_k 及以 αs 代替 s，方程組的形狀保持不变，此处 α 是任意常数。設 $q_k^{(0)}$ 及 $p_k^{(0)}$ 是 q_k 及 p_k 在 $s=0$ 时的初始值。如果注意上面所講的，就可断言在标准方程組的解中，p_k，$p_k^{(0)}$ 及 s 是通过組合 sp_k 和 $sp_k^{(0)}$ 的形狀出現的，也就是，这解有形式：

$$q_k=\varphi_k(r_k,\ q_k^{(0)});\quad t_k=\psi_k(r_k,\ q_k^{(0)}),\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

其中 $t_k=sp_k$ 及 $r_k=sp_k^{(0)}$。注意到关系式 $\psi(q_k,\ p_k)=1$ 及 $t_k=sp_k$，就可断言从点 $(q_1^{(0)},\ q_2^{(0)},\ \cdots,\ q_n^{(0)})$ 到点 $(q_1,\ q_2,\cdots,\ q_n)$ 的測地距离可表示为以下公式：

$$s^2=\Gamma=\psi(q_k,\ t_k)=\psi[q_k,\ \psi_k(r_k,\ q_k^{(0)})]。$$

利用等式 $q_k=\varphi_k(r_k,\ q_k^{(0)})$，我們可用 q_k 及 $q_k^{(0)}$ 来表示 r_k，于是所写公式的右端可用 q_k 及 $q_k^{(0)}$ 表示。

82. 雅可比定理 如果常微分方程組 (175) 的通积分可完全地求得,则自然可建立和給定的变分問題相适应的一切可能的場,且因之可求出方程 (176) 的任何解。我們將在本卷的第二部份再講这問題,那时我們將闡明一阶偏微分方程的理論。反之,如果我們能求得方程 (176) 的解,就可以作出方程組 (175) 的通积分,这是我們現在要証明的。不过需要确定所謂能够求得方程 (176) 的解这个断言是什么意义。这方程确定自变量 $(x, q_1, \cdots, q_n)$ 的函数 θ。它本身不含有函数 θ,因而对它的任何解添加任意常数项 a,也得到方程的解。我們称这样的解为方程的全积分,就是这个解除了含有上面提及的任意常数 a 以外,还含有 n 个任意常数

$$\theta=\theta(x, q_1, \cdots, q_n, a_1, \cdots, a_n)+a, \tag{182}$$

并且假設二阶偏导数 $\theta_{q_i a_k}$ 为元素的行列式不等于零。这就显出,如果知道方程(176)的全积分,借助于簡單微分,就使我們有可能来作出方程組(175)的通积分,也就是有下面雅可比定理:如果已知方程(176)的全积分(182),則等式:

$$\theta_{a_k}=b_k; \tag{183}$$

$$\theta_{q_k}=p_k, \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{183_1}$$

給出方程組(175)的依賴于 $2n$ 个任意常数的解,其中 a_k 及 b_k 是任意常数。

由于所作的假設,行列式 $\|\theta_{q_i a_k}\|$ 不等于零,我們可以在方程(183)中就 q_i 解出,并且变量 q_k 可用自变量 x 及任意常数 $a_1, \cdots, a_n$ 来表达。將这些表达式代入方程 (183_1) 的左端,我們也得到用 $x, a_1, \cdots, a_n$ 表达的 p_k,因而我們必須証明,所得的 q_k 及 p_k 的这些表达式滿足方程組 (175)。对方程 (183) 关于 x 微分且对方程 (176) 关于 a_i 微分,得到 $2n$ 个等式:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial a_i}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial q_s\partial a_i}\cdot\frac{dq_s}{dx}=0,\\&\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial a_i}+\sum_{s=1}^{n}H_{p_s}\frac{\partial^2\theta}{\partial q_s\partial a_i}=0,\end{aligned}\right.\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

从而推得 n 个等式：

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial q_s\partial a_i}\left(\frac{dq_s}{dx}-H_{p_s}\right)=0,\qquad(i=1,2,\cdots,n)。$$

按条件 $\|\theta_{q_s a_i}\|\neq 0$，从而立即得出 $\frac{dq_s}{dx}=H_{p_s}$。为了証明方程組(175)的其他方程的正确性，我們对方程(183_1)关于 x 微分且对方程(176)关于 q_i 微分：

$$\frac{dp_i}{dx}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial q_i}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial q_i\partial q_s}\frac{dq_s}{dx},$$

$$0=\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial q_i}+\sum_{s=1}^{n}H_{p_s}\frac{\partial^2\theta}{\partial q_s\partial q_i}+H_{q_i}。$$

逐項相减且应用已証过的等式，我們得到方程組 (175) 的其余方程。

这样一来，我們看出方程(176)的全积分的获得就給出方程組(175)的通积分，而我們的問題的極帶是由这方程組确定的。在方程組 (175) 及方程 (176) 之間的关系是和这样的几何事实相应的，極值問題的任何場或者是用構成場的極帶本身来描述，或者是用这場的橫截曲面来描述。

83. 間断解 在某些情况中發現了这样事情，在具有連續改变的切綫的曲綫中，沒有这样一条曲綫它給出某泛函的極值，从而發生能否在更广泛一类的曲綫中得到解的問題，例如，在这样曲綫类中，它在个别的点沒有切綫，然而有确定的左及右切綫（有角点的曲綫）。我們对最簡單的泛函：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx\tag{184}$$

进行概略的討論而不停留在詳細証明上。

首先考察一个特例，亦即如下形式的泛函：

$$J=\int_{-1}^{+1}y^2(1-y')^2dx, \tag{185}$$

并且待求曲綫应經过点 $M_0(-1, 0)$ 及点 $M_1(1, 1)$。对任何这样曲綫泛函(185)显然是正的。作由于兩个直綫段構成的且連接 M_0 及 M_1 兩点的曲綫，也就是折綫 M_0OM_1，其中 O 是平面(x,y)的原点。不难看出，对所取折綫泛函(185)为零，因为沿綫段 $M_0O: y=0$，而沿綫段 $OM_1: y'=1$。这折綫在坐标原点有角点，它显然給出积分(185)的極值。

現在进行一般情况的討論。設連接兩点(x_0, y_0)及(x_1, y_1)且有一个角点(x_2, y_2)的某曲綫，并且假設在与充分鄰近的，也可能有角点的且經过已知点(x_0, y_0)及(x_1, y_1)的其他曲綫来比較，它給出泛函(184)的極值。我們可認为不仅端点是固定的，而且所考察的曲綫的角点(x_2, y_2)也是固定的。在这假設下这曲綫更应給出积分(184)的極值。从而立即推知，与 x 軸上的区間$[x_0, x_2]$及$[x_2, x_1]$相应的兩条部份曲綫应当是問題的極帶，也就是应当滿足相应的尤拉方程。重要的是闡明曲綫在角点的縱标及曲綫在角点的切綫角系数应当滿足的那个条件。我們来确定积分(184)的变分，用我們的曲綫作为出發的曲綫且將整个区間$[x_0, x_1]$分为兩部份$[x_0, x_2]$及$[x_2, x_1]$。

如果注意到曲綫的兩端点是固定的，且兩条分段曲綫都滿足尤拉方程，我們就得到一次变分的下面表达式：

$$\delta J=[F-y'F_{y'}]_{x_2-0}\delta x_2-[F-y'F_{y'}]_{x_2+0}\delta x_2+\\+[F_{y'}]_{x_2-0}\delta y_2-[F_{y'}]_{x_2+0}\delta y_2。$$

由于 δx_2 及 δy_2 的任意性，如果这曲綫給出积分(184)的極值，我们得到下面兩个条件：

(186) $[F-y'F_{y'}]_{x_2-0}=[F-y'F_{y'}]_{x_2+0}$; $[F_{y'}]_{x_2-0}=[F_{y'}]_{x_2+0}$,

我們的曲綫在角点应当满足这兩条件。这些条件通常称作維尔斯特拉斯-爱尔德曼条件。建議讀者檢驗給出积分(185)的極值的折綫在原点确实满足这兩条件。

我們注意，条件(186)归結到要求表示式 $F-y'F_{y'}$ 及 $F_{y'}$ 在点 $x=x_2$ 的連續性，而在这点 y' 有跳躍。这些表示式在 y' 是連續的其他点处显然也是連續的。設尤拉方程的通积分已經構造好了。一般地講，在这积分中出現的兩个任意常数的值对区間 $[x_0, x_2]$ 及 $[x_2, x_1]$ 来講是不相同的。設

$$y=\omega_1(x, C_1, C_2)$$

是对于区間 $[x_0, x_2]$ 的通积分及

$$y=\omega_2(x, C_3, C_4)$$

是对于区間 $[x_2, x_1]$ 的通积分。我們必須确定五个常数，也就是任意常数 C_1, C_2, C_3, C_4 的值及角点的橫标 x_2。我們有 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 的兩个边值条件，而且也有兩个条件(186)。从曲綫在 $x=x_2$ 的連續性我們得到所缺少的第五个等式：

$$\omega_1(x_2, C_1, C_2)=\omega_2(x_2, C_3, C_4)。$$

用完全类似的方法，我們也可考察有几个角点的曲綫的情況。

对重积分：

$$J=\iint_B F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy \tag{187}$$

的間断問題也可得到类似条件。

設某曲面 $u(x, y)$ 在固定境界且具有某皺折綫时給这积分以極值。換句話說，函数 $u(x, y)$ 应确定在平面 (x, y) 的区域 B 内，且在这区域的境界上应有給定的值，然在区域 B 的內部可存在曲綫 λ，函数 $u(x, y)$ 沿着 λ 的一阶导数有跳躍，而这些偏导数在这曲綫的兩側都有确定的極限，但这些極限可以不相等的。在这样

函数类中求一个函数，它給积分(187)以相对極值。

設某函数确实給出这个極值，且在区域 B 的内部有皺折綫 λ，它將区域 B 区分为兩部份：B_1 及 B_2。完全和前面一样来討論，我們确信函数 $u(x, y)$ 在区域 B_1 及 B_2 内应当是奧斯特洛格拉德斯基方程的解。重要的关鍵就是闡明函数 $u(x, y)$ 及它的一阶偏导数在曲綫 λ 上的点应滿足的那个条件。設 φ 是某函数，它含有 $u(x, y)$ 及它的一阶偏导数。一般地講，当从区域 B_1 及 B_2 内的点迫近于曲綫 λ 上的点时，这函数有不同極限，我們用 φ_1 及 φ_2 記这兩个極限。对这兩極限的差，也就是对 φ 的跳躍，引入特別記号：

$$[\varphi]=\varphi_2-\varphi_1。$$

回到給出二重积分的变分的公式(26)。右端第一項可写作如下形式：

$$\int_l \delta u\cdot\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}\right)ds,$$

如果注意 $\frac{dy}{ds}$ 及 $\left(-\frac{dx}{ds}\right)$ 是境界 l 的向外法綫 n 的方向余弦，我們可以將上面各項写为如下形式：

$$\int_l \delta u[F_{u_x}\cos(n, x)+F_{u_y}\cos(n, y)]\,ds。$$

如果將区域 B 分为兩部份 B_1 及 B_2，則現在可应用公式(26)到积分(187)。在每一个部份区域内函数 $u(x, y)$ 应滿足奧斯特洛格拉德斯基方程，因此二重积分等于零。区域 B_1 及 B_2 的境界是由于境界 l 的一部份及曲綫 λ 所構成。在 l 上我們有 $\delta u=0$，而在境界 λ 上对于区域 B_1 及 B_2 的向外法綫的方向余弦是异号的。这样一来，最后得到：

$$\delta J=\int_\lambda \delta u\{[F_{u_x}]\cos(n, x)+[F_{u_y}]\cos(n, y)\}ds,$$

其中 n 是 λ 的法綫方向，对 B_2 是向外的。从条件 $\delta J=0$ 及 δu 的

任意性，我們得到沿着 λ 应满足的一个条件：

$$[F_{u_x}]\cos(n, x)+[F_{u_y}]\cos(n, y)=0。 \tag{188}$$

因为当考察积分(187)的变分时曾認为曲綫 λ 是固定的，故只得到一个条件。更詳細地考察积分的变分还可得到形式如下的第二条件：①

$$[F]=(F_{u_x})_2[u_x]+(F_{u_y})_2[u_y], \tag{189}$$

其中圓括弧符号外的下标 2 表示在圓括弧內的函数沿着 λ 所取的値应取从区域 B_2 的一側的極限。条件(188)及(189)与对于泛函(184)的条件(186)是类似的。

84. 單側極値　以前我們曾經討論过这样問題 [67]：在連接平面 (x, y) 的兩点 M_0 及 M_1 的曲綫中，求一条曲綫，这曲綫圍繞 OX 軸旋轉生成有最小面积的曲面。

相应于这問題的泛函有如下形式：

$$J=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx。$$

严格地講，这时应規定使曲綫 $y(x)$ 在 OX 軸的上面的条件，也就是要求满足不等式 $y(x)\geqslant 0$ 的条件。若变分学的問題中的待求函数(或它們的导数)应服从某不等式，則这个問題通常叫做單側極値問題。

考察泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \tag{190}$$

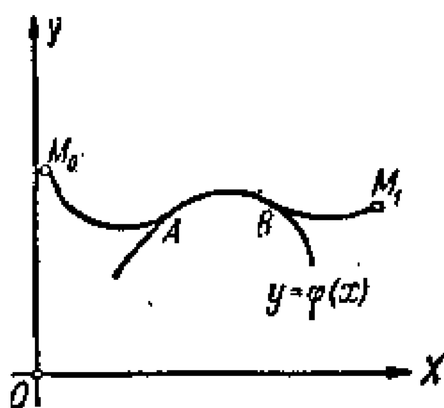
在下列形式

$$y-\varphi(x)\geqslant 0$$

的附加条件下的最簡單極値問題，其中 $\varphi(x)$ 是給定的函数，它有連續导数。換句話說，待求曲綫应在曲綫 $y=\varphi(x)$ 的上面。除此

① H. M. 根合尔，变分学教程，国立技术理論書籍出版局，1941。

以外，待求曲綫应經过給定的点 $M_0(x_0, y_0)$ 及 $M_1(x_1, y_1)$。待求曲綫可由兩部份所構成，在曲綫 $y=\varphi(x)$ 的上面的部份及这曲綫本身的某部份。在圖三上有兩段(M_0A 及 BM_1)在曲綫 $y=\varphi(x)$ 的上面，及曲綫本身的一段 AB。对于 M_0A 及 BM_1 的兩段曲綫，如寻常一样是双側变分，这兩段应是积分 (190) 的極帶。在曲綫 $y=\varphi(x)$ 的一段 AB 上只是單側变分，在这里 $\delta y\geqslant 0$。如果注意积分 (190) 的变分公式 (13)，就可以断言为了要求这积分有極小值，沿着 AB 必須有：



(圖三)

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\geqslant 0。$$

除此以外，为了这極値存在在点 A 及 B 必須滿足某些条件。我們不来講明这个問題，只指出在最簡單的情况，这条件归結到：曲綫 M_0A 及 BM_1 在点 A 及 B 与曲綫 AB 要有公共切綫。

85. 二次变分 到現在为止，我們只是对各种类型的泛函的一次变分进行研究。这一次变分等于零是給定的曲綫或曲面使对应的泛函有極值的必要条件。这必要条件与微分学中的那个事实完全相似，也就是为了要几个变量的某函数在某点有極值，必須这函数的一阶全微分在这点为零。在微分学中我們也有在某些情况下的充分条件，而这些条件的描述有必要用到所考察的函数的二阶偏导数。在变分学中充分条件的建立是非常困难的問題。我們只考察在固定端点情况的最簡單泛函：

$$(191)\qquad J=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx。$$

我們照例来考察鄰近曲綫 $y(x)+\alpha\eta(x)$，且定义泛函(191)的二次

变分为在 $J(\alpha)$ 对 α 幂的展开式中含有 α^2 的那个项，也就是令：

$$\delta^2 J=\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{d^2J}{d\alpha^2}\right]_{\alpha=0}。$$

这就立即导到下面的公式：

$$\delta^2 J=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(P\eta^2+2Q\eta\eta'+R\eta'^2)\,dx, \tag{192}$$

其中

$$P=F_{yy};\quad Q=F_{yy'};\quad R=F_{y'y'}。 \tag{193}$$

因为 $2Q\eta\eta'=Q\dfrac{d(\eta^2)}{dx}$，則由于分部积分法且注意到 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，得到：

$$\delta^2 J=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(S\eta^2+R\eta'^2)\,dx, \tag{194}$$

其中

$$S=P-\frac{dQ}{dx}。$$

我們認为極值的必要条件已滿足，也就是曲綫 $y(x)$ 是極帶。为明确起見我們只对积分 (191) 的極小值来講。函数 $J(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 时应有極小，因之，極小的必要条件是：对任何选擇的 $\eta(x)$ 有 $\delta^2J\geqslant 0$。我們証明，从这里立即显出沿着我們的曲綫应有不等式 $R\geqslant 0$。事实上，設在某值 $x=c$ 在曲綫上有相反不等式 $R(c)<0$。由于 $R(x)$ 的連續性的假設，这不等式在某充分小区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 内也成立。現在我們确定一个这样函数 $\eta(x)$，它在所指区間的外面及这区間的端点上等于零，且有一切必需的导数，而在提及的区間上这函数的絕对值充分小，可是在这区間上它摆动的充分快。当这样选擇函数 $\eta(x)$ 时，积分 (194) 縮小为对区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 的积分，在这区間内由假設函数 $R(x)$ 有負值。积分号下的函数的符号由含有 $\eta'^2(x)$ 的項决定的，因而积分的值是負的，这与前面指出的积分 (191) 有極小的必要条件相矛盾。因此为了要極帶 $y(x)$ 給积分

(191)以極小值的必要条件是沿着这極帶实現下条件:

$$F_{y'y'} \geqslant 0。 \tag{195}$$

类似方法,为了要極帶給积分(191)以極大值的必要条件是沿着这極帶实現下条件:

$$F_{y'y'} \leqslant 0。$$

所引出的条件通常称作勒让特条件。

86. 雅可比条件 在轉到进一步研究二次变分之前,我們提起关于二阶綫性方程:

$$y''+p(x)y'+q(x)y'=0 \tag{196}$$

的解的零点的一些重要注意,并且我們假設系数$p(x)$及$q(x)$在某区間$[x_0, x_1]$内都是連續的,且在以后的所有討論都这样規定。設x_2是方程(196)的某个解$y(x)$的零点,亦即$y(x_2)=0$。不难証明,$y'(x_2)\neq 0$。事实上,在相反情况,解$y(x)$在点x_2满足开始条件$y(x_2)=y'(x_2)=0$,因而由于存在及唯一性定理$y(x)$应恒等于零。因之我們可断言,方程(196)的任何解当經过零点时改变符号。設$y_1(x)$及$y_2(x)$是方程(196)的任何兩个綫性無关解,則它們沒有公共零点。事实上,如果它們有公共零点,則这些解的朗斯基行列式在这点为零[II;24],因之在整个区間$[x_0, x_1]$内也为零,这与解的綫性無关性相矛盾。如果解是綫性相关的,亦即它們仅差一个常数因子,則它們显然有公共零点。

和上面一样,設$y_1(x)$及$y_2(x)$是兩个綫性無关解。我們就有以下公式[II;24]:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\Delta_0\frac{e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}}{y_1^2},$$

其中Δ_0是不等于零的确定值。所写公式的右端保持定号,也正是Δ_0的符号。从而推得比式$y_2:y_1$必單調地改变。比方說,設$\Delta_0>0$。当x增加时比式$y_2:y_1$应增加,且当x經过$y_1(x)$的零点时它应作

从$(+\infty)$到$(-\infty)$的跳躍。当x繼續增加时，我們只能經过$y_2(x)$的零点再达到$y_1(x)$的次一零点。于是我們看出，方程(196)的任何兩个綫性無关的解的零点必互相更替的，也就是在任何解的相鄰兩零点之間，任何别的与它綫性無关的解有一个且仅有一个零点。

現在回到二次变分的叙述，我們假設沿着場的極帶实現較条件(195)更强的条件，也就是$F_{y'y'}>0$（这亦为勒上特强条件）。

考察在公式(194)中出現的积分，以字母u代替字母η：

$$K(u)=\int_{x_0}^{x_1}(Su^2+Ru'^2)dx。\tag{197}$$

我們注意，这积分的尤拉方程有如下形式：

$$L(u)=\frac{d}{dx}(Ru')-Su=0。\tag{198}$$

从另一方面，注意到$Ru'^2dx=Ru'du$，且由分部积分法，則得：

$$K(u)=-\int_{x_0}^{x_1}uL(u)dx,\tag{199}$$

并且我們須假設函数u在兩端点为零。考察綫性方程(198)在端点$x=x_0$等于零的解。任何这样的解与方程(198)的满足初始条件：

$$u_0(x_0)=0;\ u_0'(x_0)=1\tag{200}$$

的解$u_0(x)$只差一常数因子，并且由勒上特强条件，对方程(198)来說在整个区間$[x_0, x_1]$內存在及唯一性定理可适用。对以后重要的是解$u_0(x)$在提及的区間的內部是否有零点的事实。如果它竟然有这样的零点，則我們的極帶不給积分(191)以極小值。我們来証明这个命題。設$u_0(x)$在区間的內部有某零点$x=x_2$，亦卽$u_0(x_2)=0$。前面曾見过，我們应有$u_0'(x_2)\neq 0$。作曲綫$u_1(x)$，它由积分$K(u)$的兩極帶構成的，也就是，当$x_0\leqslant x\leqslant x_2$时令$u_1(x)=$
$=u_0(x)$且当$x_2\leqslant x\leqslant x_1$时令$u_1(x)=0$。这样一来，我們得到在$x=x_2$时有角点的曲綫。按公式(199)，取沿区間$[x_0, x_2]$的积分

$K(u_1)$ 的表达式[$u_1(x)$ 的值在这区間的兩端点都等于零]，我們确信这积分的值等于零，因为 $u_0(x)$ 在区間 $[x_0, x_2]$ 内满足方程(198)。积分 $K(u_1)$ 沿区間 $[x_2, x_1]$ 的值也同样等于零，因为在这区間内 $u_1(x)$ 恒等于零。这样一来，在整个区間 $[x_0, x_1]$ 内取积分，我們有 $K(u_1)=0$。

現在檢驗积分(197)在角点 x_2 的維尔斯特拉斯-愛尔德曼条件中的前面一个。在右边我們有 $u_1(x_2+0)=u_1'(x_2+0)=0$，而在左边有 $u_1(x_2-0)=0$ 及 $u_1'(x_2-0)=u_0'(x_2)\neq 0$，从而可見所指的条件不满足，因之函数 $u_1(x)$ 不給积分 $K(u)$ 以極值。由于 $K(u_1)=0$，从而显出存在着与 $u_1(x)$ 任意逼近的曲綫，它可能有角点且满足边界条件 $u(x_0)=u(x_1)=0$，它使 $K(u)<0$。將角点处的曲綫光滑化，可認为所写不等式对有連續改变切綫的某曲綫 $u_2(x)$ 也保持正确。在公式(194)中令 $\eta=u_2$，当 α 趋于零时，对于与曲綫 $y(x)$ 任意鄰近的曲綫 $y(x)+\alpha\eta(x)=y(x)+\alpha u_2(x)$，我們有不等式 $\delta^2 J<0$，因之这曲綫不給积分(191)以極小值。这样一来，如果 $u_0(x)$ 在区間 $[x_0, x_1]$ 的内部有零点，则满足勒让特强条件的極帶不能給积分(191)以極小值。

方程(198)通常称为雅可比方程，而且如果当 $x_0<x<x_1$ 时 $u_0(x)\neq 0$，則謂極帶 $y(x)$ 在区間 $[x_0, x_1]$ 内满足雅可比条件。如果当 $x_0<x\leqslant x_1$ 时 $u_0(x)\neq 0$，則謂極帶 $y(x)$ 满足雅可比强条件。

我們注意，方程(198)的系数 S 及 R 由它們本身的定义依賴于極帶 $y(x)$，于是上面所述的条件实际上是加到極帶 $y(x)$ 的条件。回忆起前面所說的关于二阶綫性方程的解的零点的更替性，可以断言如果雅可比条件满足，則方程(198)的任何解在区間 $[x_0, x_1]$ 的内部不能有多于一个的零点。

設沿着極帶 $y(x)$ 满足勒让特强条件及雅可比强条件。由于(200)，方程(198)的解 $u_0(x)$ 当 x 与 x_0 鄰近时是正的，因之，它在

整个区間 $[x_0, x_1]$ 内是正的，特別地当 $x=x_1$ 时也一样。將条件(200)的第一个条件少許改变，也就是令 $u_0(x_0)=\alpha$，此处 α 是充分小正数。我們仍旧有 $u_0(x_1)>0$。然而由于上面所說的，$u_0(x)$ 在区間 $[x_0, x_1]$ 的内部不能有多于一个的零点，因而如果它有这样零点，則当經过这零点时 $u_0(x)$ 应改变符号，而这是与 $u_0(x)$ 在区間 $[x_0, x_1]$ 的兩端点有相同符号矛盾的。因此，当具有勒讓特强条件及雅可比强条件时，則由給定的初始值 $u_0(x_0)=\alpha$ 及 $u_0'(x_0)=1$ 所确定的方程(198)的解 $u_0(x)$，(此处 α 是充分小正数) 在整个閉区間 $[x_0, x_1]$ 内总是正的。

利用方程(198)的这个解，我們現在可以把表达式(194)导向这样形式，从这形式立即得出 $\delta^2 J \geqslant 0$。

設 $\omega(x)$ 是有連續导数的任何函数。我們有显明的等式：

$$\int_{x_0}^{x_1}(2\eta\eta'\omega+\eta^2\omega')dx=0,$$

因为积分号下的函数是函数 $\eta^2\omega$ 的全微分，而这函数在区間的兩端点都等于零。將所写的积分乘以 $\alpha^2/2$，且加到公式(194)的右端，得到：

$$\delta^2 J=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}[(S+\omega')\eta^2+2\omega\eta\eta'+R\eta'^2]\,dx_{\circ}$$

我們要求在写出的积分中积分号下的函数是完全平方，这就归結到等式：

$$\omega^2-R(S+\omega')=0_{\circ}$$

在这方程中令 $\omega=-R\dfrac{u'}{u}$，我們恰好导出方程(198)，也就是，我們可取函数 $\omega=-R\dfrac{u_0'}{u_0}$ 作为函数 ω，并且重要的是 $u_0(x)$ 在整个閉区間 $[x_0, x_1]$ 内不为零。当这样选擇函数 ω 时，我們把公式(194)化为以下形式：

$$\delta^2 J=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}R\left(\eta'+\frac{\omega}{R}\eta\right)^2 dx,$$

从而立即推得 $\delta^2 J\geqslant 0$。

这样一来，如果極帶满足勒上特强条件及雅可比强条件，则对这極帶二次变分(194)不为负。

87. 弱及强極值 我們說極帶 $y(x)$ 給积分(191)以弱極值，如果它与分布在它的某一級 ε-接近度内的一切曲綫比較給这积分以極值，亦即与关于縱标及切綫角系数充分与它鄰近的一切曲綫比較給这积分以極值。如果同一極帶与分布在它的某零級 ε-接近度(只关于縱标的接近度)内的一切曲綫比較給积分(191)以極值，則謂这極帶給积分以强極值。显而易見，任何强極值也是弱極值，但其逆就不是經常地正确了。

在变分学教程中已証明，我們上面所說的勒上特强条件及雅可比强条件是極帶給积分(191)以弱極小值的充分条件①。

我們叙述对雅可比方程的新看法且闡明雅可比条件的几何意义。設有依賴于一个参数的極帶族 $y(x, \alpha)$，且令

$$u(x)=\left.\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}, \tag{201}$$

其中 α_0 是参数 α 的某一特别值。

对于任何值 α 函数 $y(x,\alpha)$ 满足尤拉方程：

$$F_y[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)]-\frac{d}{dx}F_{y'}[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)]=0。$$

对这方程的兩端关于 α 微分，且交換关于 α 及 x 的微分的次序，我們得：

$$F_{yy}[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)]\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}+F_{yy'}[\ ]\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial\alpha}-$$
$$-\frac{d}{dx}\left\{F_{yy'}[\ ]\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}+F_{y'y'}[\ ]\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right\}=0。$$

但从(201)，显出：

$$\left.\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=u(x);\quad \left.\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=u'(x),$$

① M. A. 拉符林契也夫及 Л. A. 留斯杰尔尼克，变分学教程，1936，第168頁。

因之，我們得到对于 u 的下面方程：

$$F_{yy}u+F_{yy'}u'-\frac{d}{dx}(F_{yy'}u+F_{y'y'}u')=0,$$

它可写作如下形式：

$$\frac{d}{dx}(Ru')-Su=0, \tag{202}$$

其中

$$R=F_{y'y'}[x,\ y(x,\ \alpha_0),\ y'(x,\ \alpha_0)];\quad S=F_{yy}[\ ]-\frac{d}{dx}F_{yy'}[\ ]。 \tag{203}$$

方程(202)与雅可比方程相同。現在我們取从定点 $(x_0,\ y_0)$ 出發的極帶束作为極帶族。用参数 α 作为極帶在点 $(x_0,\ y_0)$ 的角系数，我們得到極帶族在点 x_0 的初始条件：$y(x_0,\ \alpha)=y_0$，$y'(x_0,\ \alpha)=\alpha$，因之由公式(201)确定的函数 $u(x)$ 満足初始条件 $u(x_0)=0$，$u'(x_0)=1$，亦即与我們以前曾引过的雅可比方程的解 $u_0(x)$ 一致。这样一来，方程 $u_0(x)=0$ 与方程 $\left.\frac{\partial y(x,\ \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=0$ 是相同的。按包綫定理，这后一方程給出極帶束的包綫与束中的極帶本身的切点的横标。設 $y(x,\ \alpha_0)$ 是我們的束中的某極帶，且設这極帶与束的包綫在有横标 $x=x_2$ 的点相切。我們說这切点是关于極帶 $y(x,\ \alpha_0)$ 与有横标 $x=x_0$ 的出發点相共軛。从以前的討論，推知方程 $u_0(x)=0$ 給出上面提到的点的横标 x_2。这样一来，如果我們能够建立与所取極帶对应的雅可比方程(202)的解 $u_0(x)$，則無須知道極帶束的方程，就可求出在給定的極帶上的共軛点。于是我們可說，前面講过的雅可比强条件有这样几何意义，就是区間 $[x_0,\ x_1]$ 不含有与極帶的出發点相共軛的点。我們注意，一般地講，上面的討論是不严格的，因为方程 $\frac{\partial y(x,\ \alpha)}{\partial \alpha}=0$ 不一定給出包綫与極帶的切点。然而可以严格地証明，如果沿着極帶 $y(x)$，R 的值不等于零，那末值 x_2 与值 x_0 共軛的必要且充分的条件是 x_2 为 $u_0(x)$ 的零点。

还要指出，勒让特强条件与雅可比强条件合在一起是給定的極帶可被場所圍繞的充分条件，也就是，能够作出这样的極帶場，使 $y(x)$ 是这場的一条極帶的充分条件，且当 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时它的弧在所作的場的內部。这情况在严格証明極值的充分条件时起着重要作用。

88. 維尔斯特拉斯函数　在本节中，我們引出和强極值的充分条件有关的某些結果。設在平面 $(x,\ y)$ 上我們有某極帶場，充満了平面 $(x,\ y)$ 的区域 B。前面我們已經說过，我們的場的極帶的角系数 y' 是在区域 B 內的点函

数。对这个函数我們引进特殊記号 $y'=t(x, y)$ (場的傾斜函数)。設 $\theta(x, y)$ 是場的基本函数；它的全微分可表示为下式：

$$(204) \qquad d\theta(x, y)=[F(x, y, t)-tF_{y'}(x, y, t)]dx+F_{y'}(x, y, t)dy,$$

并且在这里用通常的字母 d 代替以前用过的字母 δ。从而立即推得公式(204)的右端的曲綫积分不依賴于在区域 B 的内部的积分路徑。这积分可写作如下形式：

$$(205) \qquad \int_{\lambda}\left\{F(x, y, t)+\left[\frac{dy}{dx}-t(x, y)\right]F_{y'}(x, y, t)\right\}dx,$$

它通常称为希尔伯特不变积分。如果我們取場的某極帶作为 λ，則沿着这極帶有等式 $\frac{dy}{dx}=t(x, y)$，而积分(205)就化为基本积分：

$$(206) \qquad J=\int_{\lambda}F(x, y, t)dx\,。$$

預先作了这些說明以后，我們就可导出表示泛函 J 的改变量的基本公式。設 λ 是这泛函連接兩点 (x_0, y_0) 及 (x_1, y_1) 的某極帶，且設这極帶可被充滿平面 (x, y) 的某区域 B 的場所圍繞。設 l 是連接相同兩点 (x_0, y_0) 及 (x_1, y_1) 且有連續改变的切綫的任何其他曲綫，且設 l 也在区域 B 内。用 $J(l)$ 及 $J(\lambda)$ 分別記作基本泛函(206)沿曲綫 l 及 λ 的值。前面已經見到，$J(\lambda)$ 的值与积分(205)沿 λ 的值相等，但因这个积分不依賴于路徑，从而我們可取它不是沿着 λ 而是沿着曲綫 l。这样一来，我們有：

$$J(\lambda)=\int_{l}\left\{F(x, y, t)+\left[\frac{dy}{dx}-t(x, y)\right]F_{y'}(x, y, t)\right\}dx,$$

因之我們得到兩积分的差的下面表达式：

$$(207) \qquad J(l)-J(\lambda)=\int_{l}\left\{F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)-F(x, y, t)-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{dy}{dx}-t(x, y)\right]F_{y'}(x, y, t)\right\}dx\,。$$

我們回忆一下，在这表达式中，$t(x, y)$ 是場的傾斜函数，而 $\frac{dy}{dx}$ 是曲綫 l 的切綫角系数。在討論中引进四个变量的函数：

$$(208) \qquad E(x, y, \xi, \eta)=F(x, y, \eta)-F(x, y, \xi)-(\eta-\xi)F_{y'}(x, y, \xi),$$

它通常称为对于泛函(206)的維尔斯特拉斯函数。利用引进的函数，我們可將公式(207)改写作如下形式：

$$(209) \qquad J(l)-J(\lambda)=\int_{l}E\left(x, y, t, \frac{dy}{dx}\right)dx\,。$$

所写出的公式是在研究極值的充分条件时的基本公式。特别利用这个公式可以証明，为了要極帶 $y(x)$ 給泛函(206)以强極小，必須沿着这極帶对于任何变量 η 滿足下列不等式：

(210)
$$E(x, y, y', \eta)\geqslant 0。$$

从公式(209)立即推出下面定理，这定理業已給出强極小的充分条件：为了要有固定端点的極帶 $y(x)$ 給出强極小，只要它可被場圍繞且存在 $y(x)$ 的这样鄰域，在这鄰域中的每一点对任何变量 η 滿足下面的不等式：

(210_1)
$$E[x, y, t(x, y), \eta]\geqslant 0,$$

其中 $t(x, y)$ 像上面一样是場的傾斜函数。因为我們利用曲綫的显式方程，則当極帶 $y(x)$ 被場圍繞时，必須要求作成場的極帶族有显式方程 $y=y(x,\alpha)$，其中 $y(x, \alpha)$ 有直到二阶的連續导数。

按照泰勒公式展开維尔斯特拉斯函数中出現的差 $F(x,y,\eta)-F(x,y,\xi)$ 到 $(\eta-\xi)$ 的二次幂，我們可写維尔斯特拉斯函数为以下形式：

$$E(x, y, \xi, \eta)=\frac{1}{2}(\eta-\xi)^2F_{y'y'}(x, y, \eta_1),$$

其中 η_1 是在 ξ 及 η 之間一个値。从而立即推出，要使維尔斯特拉斯函数为正，只要对任何値 η 有不等式 $F_{y'y'}(x, y, \eta)\geqslant 0$。从而得到强極小的更簡單的充分条件，也就是，要求在固定端点时極帶 $y(x)$ 給出强極小，只要它可被場圍繞，且在这場中的每一点对任何値 η 滿足不等式：

(210_2)
$$F_{y'y'}(x, y, \eta)\geqslant 0。$$

在本节中說出的一切定理的証明，可在前面提过的 M. A. 拉符林契也夫及 Л. A. 緑斯杰尔尼克的教程中找到。

89．例 1． 考察对应于平面上的几何光学的基本問題的泛函：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}n(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx。$$

在这情况，对任何値 η，

$$F_{y'y'}(x, y, \eta)=\frac{n(x, y)}{(1+\eta^2)^{3/2}}>0,$$

亦即滿足了条件 (210_2)，因之，如果經过兩点 M_0 及 M_1 的極帶可被場圍繞，則它給出所考察的泛函的强極小。在 $n(x, y)=y^{-1}$ 的情况，在半平面 $y>0$ 內的極帶是与 OX 軸正交的半圓周。如果在上半平面內的点 M_0 及 M_1 不在与 OX 軸垂直的直綫上，則經过这兩点有一条确定極帶，因而它可被場圍繞。

2. 取 $n(x, y)=\sqrt{y+h}$ 的情况，亦即考察积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{y+h}\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad (h\ \text{是正常数})。$$

积分号下的函数不含有 x，因而尤拉方程有积分：

$$\sqrt{y+h}\sqrt{1+y'^2}-\frac{\sqrt{y+h}\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$$

或

$$\frac{\sqrt{y+h}}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1。$$

就 y' 解出且求积，得到尤拉方程的通积分：

$$y+h-C_1^2=\left(\frac{x}{2C_1}+C_2\right)^2,$$

它是抛物綫族。

当 $C_1=0$ 时，得到与 OY 軸平行的直綫作为極帶。

我們考察从原点引出的極帶束，亦即取初始条件：

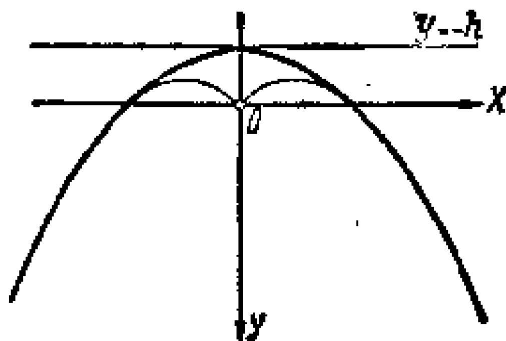
$$y|_{x=0}=0;\ y'|_{x=0}=\alpha。$$

由这初始値确定了 C_1 及 C_2，我們得到：

$$y=\frac{(1+\alpha^2)x^2}{4h}+\alpha x。$$

对 α 微分且消去 α，求得这抛物綫族的包綫：

$$y=\frac{x^2}{4h}-h。$$



(圖四)

这是以 $A(0,-h)$ 为頂点且以 $x=0$ 为軸的抛物綫（圖四）。在从原点到抛物綫与包綫相切点之前的任何点之間的極帶部份上雅可比强条件滿足。此外，由：

$$F_{y'y'}=\frac{\sqrt{y+h}}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}>0,$$

也滿足了勒让特强条件，亦即極帶的这部份可被場圍繞，且由于前面所說的例子，这極帶弧給我們的泛函以强極小。我們注意，从泛函的形式显出条件 $y+h\geqslant 0$，亦即在这里我們有單側極値問題。在半平面 $y+h>0$ 内一切都和尋常一样。

3. 考察积分

$$J=\int_0^1 y'^3 dx$$

且設需要引出經过兩点 $M_0(0, 0)$ 及 $M_1(1, 1)$ 的極帶。

尤拉方程有通积分 $y=C_1x+C_2$，且極帶 $y=x$ 經过給定的兩点。在这里 $F_{yy}=F_{yy'}=0$，及 $F_{y'y'}=6y'$，亦即在極帶 $y=x$ 上我們有 $F_{y'y'}=6>0$，因而滿足了勒上特强条件。在这里雅可比方程 (198) 是 $u''=0$，而它滿足初始条件(200) 的解是 $u_0(x)=x$。它除了原点 $x_0=0$ 以外根本沒有零点。这样一来，沿着極帶 $y=x$ 上的綫段 M_0M_1 滿足了勒上特强条件及雅可比强条件，因而極帶的这綫段給我們的泛函以弱極小。

維尔斯特拉斯函数 (208) 有形式：

$$E(x, y, \xi, \eta)=\eta^3-\xi^3-3(\eta-\xi)\xi^2。$$

沿着我們的極帶不等式 (210) 的左端有形式：

$$E(x, y, y', \eta)=\eta^3-3\eta+2,$$

因而存在 η 値，对于这样的 η 不等式 (210) 不滿足，亦即極帶 $y=x$ 不給出强極小。

4. 在給定的曲面上確定測地綫的問題引导出泛函[67]：

$$J=\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du,$$

其中 E, F 及 G 是 (u, v) 的已知函数，且在根号下的三項式只取正値，亦即 $EG-F^2>0$ 及 $E>0$。

我們有：

$$F_{v'v'}=\frac{EG-F^2}{(E+2Fv'+Gv'^2)^{3/2}}>0,$$

因而条件(210_2)已滿足，也就是，如果測地綫可被測地綫場圍繞，則它給我們的泛函在固定端点时以强極小。特別是，在球面的大圓周上且弧度小于 π 的弧，可被大圓周作成的場圍繞。

90. 奧斯特洛格拉德斯基-哈米尔頓原理 在建立力学及数学物理的方程时变分学起着基本作用。从某些变分原理借助于能的概念通过同一方法可得到这些方程。在質点系的力学中已知的这后一概念既运用到其他物理过程上，而当利用变分学基本原理时，如我們在后面卽將見到的，又引得作出数学物理方程的某些一般途徑。我們从質点系的力学着手。

設有含 n 个質点的質点系，用 m_k 記它們的質量，且用 (x_k, y_k, z_k) 記它們的坐标。設这系的运动是在下面的約束之下：

(211) $$\varphi_s=0, \qquad (s=1, 2, \cdots, m),$$

并且是由具有力函数

(212) $$X_k=\frac{\partial U}{\partial x_k}; \quad Y_k=\frac{\partial U}{\partial y_k}; \quad Z_k=\frac{\partial U}{\partial z_k}$$

的作用力所产生的，式中 φ_s 及 U 都是点的坐标及时間的已知函数。我們的質点系的动能由以下公式表达：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k'^2+y_k'^2+z_k'^2)。$$

設从对应于时刻 $t=t_0$ 的某位置 I，我們的系轉移到在时刻 $t=t_1$ 的另一位置 II。从能够实現系从 I 到 II 的轉移的一切可能方法中，我們选擇系的一类可容許运动，也就是这样的运动，它符合給定的关系且在一定时刻区間 $[t_0, t_1]$ 内系从 I 轉移到 II。奧斯特洛格拉德斯基-哈米尔頓原理肯定的是，从一切可容許运动中区分出来的質点系的实际运动滿足积分

(213) $$J=\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt$$

有極值的必要条件 $\delta J=0$。系的每一可容許运动是与全体 $3n$ 个函数 $x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$ 对应的，这些函数确定在区間 $[t_0, t_1]$ 内，它們滿足方程組(211)且在所指区間的兩端点有定值。这样一来，我們有具有整約束(211)及固定边界的变分問題。为了解决这問題，照拉格朗日乘数法，我們应作輔助函数

$$F=T+U+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\varphi_s,$$

且写出这函数的寻常尤拉方程。在这里我們有：

$$F_{x_k'}=m_k x_k'; \quad F_{x_k}=U_{x_k}+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k},$$

且对于坐标 y_k 及 z_k 有类似的方程，因而尤拉方程有形式：

$$m_k x_k'' - X_k - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t) \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} = 0,$$

$$m_k y_k'' - Y_k - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t) \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k} = 0,$$

$$m_k z_k'' - Z_k - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t) \frac{\partial \varphi_s}{\partial z_k} = 0,$$

也就是，它們与系的实际运动的微分方程一致，这也就是我們所希望証明的。

如果利用互不倚賴的参数 $q_1, \cdots, q_k$ 来代替确定系的位置的直角坐标(其中 $k=3n-m$)，那末函数 T 及 U 是这些参数的函数：

$$T(q_1, q_1', \cdots, q_k, q_k', t);\ U(q_1, \cdots, q_k, t),$$

在这里沒有像(211)的关系方程，因而我們得到关于积分(213)在函数 q_k 的边值固定且完全沒有約束的極值問題。尤拉方程將有形式：

$$T_{q_i} + U_{q_i} - \frac{d}{dt}(T_{q_i'} + U_{q_i'}) = 0,$$

因 U 不依賴于 q_k' [II;19]，或可写为：

$$T_{q_i} + U_{q_i} - \frac{d}{dt} T_{q_i'} = 0, \quad (i=1, \cdots, k)。 \tag{214}$$

在这里标准变量是 q_i 及 p_i，其中 p_i 通常称为广义冲量，它們由以下公式确定：

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i'}(T+U) = T_{q_i'}。$$

函数 H [78] 是：

$$H = \sum_{i=1}^{k} q_i' p_i - (T+U) = \sum_{i=1}^{k} q_i' T_{q_i'} - T - U。$$

如果 T 是 q_i' 的二次齐次多項式 [II;19]，則由齐次函数的尤拉定理 [I;154]，得到 $H=2T-T-U=T-U$，亦即函数 H 是系

的总能。

91. 最小作用原理 設力函数 U 既不含有 t，且函数 φ_s 也不含有 t。在这情况，如大家所知道的，有能的积分

(215) $$T-U=h,$$

它表示这样事实，动能 T 及位能 $(-U)$ 的和在整个运动时間内保持定值。其次，在所討論的情况下用参数坐标 q_s 表示的直角坐标不含有 t。动能是关于导数 q'_i 的二次型：

(216) $$2T=\sum_{s=1}^{l} m_s x_s'^2=\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}q'_i q'_j,\quad (a_{ij}=a_{ji}),$$

其中 a_{ij} 都是 q_s 的函数。利用关系 (215)，可將积分(213)的积分号下的函数写作如下形式：

$$T+U=2T-h。$$

如果略去常数項，且表示 $2T$ 如形式 $\sqrt{2U+2h}\sqrt{2T}$ 且把一个因子中的 $2T$ 代以由公式(216)所得的表达式，我們导得如下形式的积分：

(217) $$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{2U+2h}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}q'_i q'_j}\,dt。$$

要証明，我們又把对这积分的尤拉方程还原为上面已經得到的拉格朗日方程(214)。事实上，积分(217)的尤拉方程有形式：

(218) $$U_{q_i}\sqrt{\frac{2T}{2U+2h}}+T_{q_i}\sqrt{\frac{2U+2h}{2T}}-$$
$$-\frac{d}{dt}\left[\sqrt{\frac{2U+2h}{2T}}\,T_{q'_i}\right]=0,\quad (i=1,\cdots,k)。$$

我們注意，在积分(217)中积分号下的函数不含有自变量且关于导数 q'_i 是一次齐次函数。因之，像我們前面曾經見过的 [72]，所写的尤拉方程中的一个可由其余的方程推演出来，因而我們还可添加一个方程到尤拉方程上，这添加的方程固定了自变量(参数)的选择。为了要求这个自变量就是时間，我們添加到方程(218)

上的是下面方程

$$\sqrt{\frac{2U+2h}{2T}}=1,$$

它显然和能量守恒定律(215)是等价的。这时方程(218)就变为拉格朗日方程(214)了。因此，在所考察的情况，实际运动的方程是从积分(217)在固定端点时有極值的必要条件而获得。这断言是雅可比形式的最小作用原理。

引进在 k 維空間內具有坐标 $q_1, \cdots, q_k$ 的测度，它由下面的弧長的微分的表达式来确定：

$$ds^2=(2U+2h)\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}q_i'q_j'。$$

这时(217)中的积分可写作形式：

$$\int ds,$$

因而質点系的力学的基本問題是与在所指 k 維空間內关于测地綫的問題等价的。可以証明，对于实际运动的軌綫的充分小的一段，沿着这段的作用积分有弱極小。我們考虑一个質点沿着某曲面 S 按慣性运动。在这情况我們可以認为 $U=0$，因而积分(217)变为簡單形式：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{T}\,dt, \tag{217$_1$}$$

或者，如果我們引进直角坐标，则有形式：

$$\int_{l}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}。$$

运动軌綫是这曲面的测地綫。

当应用最小作用原理到在重力作用下的一个質点，并且 OY 轴的方向是与重力方向一致的，则获得[89]中例 2 的积分。

可以給最小作用原理以另一形式，我們此刻指出它而不作詳

細証明。利用能的积分(215)且略去常数項，我們可將积分(213)写作如下形式：

$$\int_{t_0}^{t_1} T dt \text{。} \tag{219}$$

我們假設可容許运动滿足約束方程及有同一常数值 h 的方程(215)，对于实际运动也是一样的，且它們既有固定的初始及最終位置又有固定的初始时刻 t_0。对它們來說最終时刻是不固定的。从这样一切可容許运动中区分出这样实际运动，它滿足积分(219)有極值的必要条件。这是拉格朗日形式的最小作用原理。我們注意，这时位能不出現在积分中而出現在附加条件(215)內。

92. 絃及膜 在轉到一般彈性学中变分原理的建立之前，我們考察一系列特殊情况的彈性物体，它們的長度或面积远比体积或更高維容积要大得多。此处变分原理的建立实質上归結到关于位能的某些假設，亦即归結到关于依賴于形变物体形态的形变力的功的某些假設。

設有沿 x 軸張緊的絃，且它在平面 (x, u) 內作平面横振动[**II;163**]。振动的絃的动能表示为以下公式：

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t^2 dx,$$

其中 ρ 是絃的綫性密度，而 $x=0$ 及 $x=l$ 是它的兩端点的横标。我們認为形变的力的功表示为絃的張力 T_0 与它的長度的增量：

$$\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\, dx - l$$

的乘积。

按牛頓二項式展开根式且限于前面兩項，我們得到形变的位能的表达式：

$$\frac{T_0}{2}\int_0^l u_x^2 dx \text{。}$$

在有对單位長計算的外力 $F(x, t)$ 的情况，我們在位能上还必須添加一項：

$$-\int_0^l F u dx \text{；}$$

最后，奧斯特洛格拉德斯基-哈米尔頓原理引导出对下积分

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho u_t^2-T_0u_x^2+2Fu)\,dx\,dt \tag{220}$$

的必要条件 $\delta J=0$。

在平面 $(x,\ t)$ 上对矩形 $0\leqslant x\leqslant l$; $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 进行积分。在固定絃的情况，在这矩形的边 $x=0$ 及 $x=l$ 上我們有边界条件 $u=0$，而在边 $t=t_0$ 及 $t=t_1$ 上，函数 u 应与函数 $u(x,\ t_0)$ 及 $u(x,\ t_1)$ 一致，它們給出絃在区間 $[t_0,\ t_1]$ 的初始値及最終値的形狀。

如果彈性力作用于絃的端点上，注意到彈性力的势量与偏移的平方成正比，那末我們应在积分 (220) 上添加如下形式的項：

$$-\int_{t_0}^{t_1}[h_1u^2(0,\ t)+h_2u^2(l,\ t)]dt\text{。}$$

这添加的項实質上是沿着上面提到的矩形的境界的积分，而且在边 $t=t_0$ 及 $t=t_1$ 上积分号下的函数等于零，而在边 $x=0$ 及 $x=l$ 上它等于 $h_1u^2(0,t)$ 及 $h_2u^2(l,\ t)$。注意到 [75] 节中所講的，以及在边 $x=0$ 上向外法綫的方向与 x 軸的方向相反的情况，我們就有在边 $x=0$ 及 $x=l$ 上下面形式的自然边値条件：

$$u_x-\frac{2h_1}{T_0}u\Big|_{x=0}=0;\quad u_x-\frac{2h_2}{T_0}u\Big|_{x=l}=0\text{。}㊀$$

二重积分 (220) 的奧斯特洛格拉德斯基公式給出絃振动的寻常方程。

对膜振动的方程可同样获得[II;176]。設在自然狀态下，膜紧張在平面 $(x,\ y)$ 內，且 T_0 是它的对單位長度計算的張力。形变的力的功表达为 T_0 与面积的增量：

$$\iint_B\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy-\iint_B dx\,dy$$

的乘积，其中 $u(x,\ y,\ t)$ 是膜的点 $(x,\ y)$ 从平衡位置在时刻 t 的偏移，且 B 是膜在平面 $(x,\ y)$ 內占有的区域。限于微小振动，我們得到积分 (213) 的下面表达式：

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint_B[\rho u_t^2-T_0(u_x^2+u_y^2)+2Fu]\,dt\,dx\,dy\text{。} \tag{221}$$

对所写的积分的奧斯特洛格拉德斯基方程引导出大家知道的膜振动的方程。如果在膜的境界上受有系数为 $q(s)$ 的彈性牽制，則在积分 (221) 上必須添加

㊀ 譯者注：这里原書为 $u_x+\frac{2h_2}{T_0}u\Big|_{x=l}=0$，但其中"+"号应为"−"号。

下项：

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_l q(s)u^2ds\,dt,$$ ㊀

其中 l 是膜的境界。在这情况，自然边值条件取如下形式：

$$\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{2}{T_0}q(s)u\Big|_l=0,$$

其中 n 是 l 的向外法綫的方向。在膜是固定境界的情况，它們显然是 $u|_l=0$。

93. 梁及薄板 所謂梁系指对弯曲作功的長条物体。当發生形变时的位能假定与曲率的平方的积分成正比。在微小振动的情况，我們以二阶导数 u_{xx} 代替曲率，因而得到形变的位能的表达式：

$$\frac{\mu}{2}\int_0^l u_{xx}^2dx,$$

其中比例系数 $\mu=EJ$[II;16]。我們曾經在前面[II;189]指出过边界条件。积分(213)在这里有下面形式：

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho u_t^2-\mu u_{xx}^2+2Fu)\,dtdx,$$

因而相应的尤拉方程化为以下的梁的横振动方程：

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^4u}{\partial x^4}=F。$$

我們注意，如果梁的兩端是自由的，则边界条件[II;189]像在[74]中讲过的可看作自然边值条件而得到。

类似于梁的情况[70; 90]，設在自然狀态下有平面形态的薄板的位能是在形变狀态下薄板的主曲率半徑的倒数的二次齐次函数的积分值，也就是：

$$-U=\iint_B\left[a\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)+\frac{2b}{R_1R_2}\right]dxdy,$$

其中 a 及 b 是某常数，B 是薄板占有的平面(x, y)的区域。对于主法截綫的曲率我們有方程[II;134]：

$$(EG-F^2)\frac{1}{R^2}+(2FM-EN-GL)\frac{1}{R}+(LN-M^2)=0。$$

在曲面的显式方程 $u=u(x, y)$ 的情况，略去关于 u_x 及 u_y 的二次项，我

㊀ 譯者注：这里原書为 $-\int_l q(s)u^2ds$，但按推理应为 $-\int_{t_0}^{t_1}\int_l q(s)u^2dsdt$。

們得到：

$$E=G=1;\ F=0;L=r=u_{xx};\ M=s=u_{xy};\ N=t=u_{yy},$$

从而

$$\frac{1}{R_1R_2}=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2;\ \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=u_{xx}+u_{yy},$$

因之：

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=(u_{xx}+u_{yy})^2-2(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)。$$

最后可写：

$$-U=\frac{D}{2}\iint_{B}[(u_{xx}+u_{yy})^2-2(1-\sigma)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)]dxdy,$$

其中 D 及 σ 是从常数 a 及 b 構成的兩个新常数。系数 D 称作薄板的弯曲的硬度，而 σ 是著名的普阿松系数。还必須添加作用在薄板表面上的外力的勢量到所写的形变的位能的表达式上。如果認为薄板沿着边緣釘牢且限于静力弯曲的情况，則最后得到积分(213)的表达式：

$$\frac{D}{2}\iint_{B}\left[-(u_{xx}+u_{yy})^2+2(1-\sigma)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)+\frac{2}{D}pu\right]dxdy,$$

其中 p 是对單位面积計算的荷重。由于[65]中的(30)式，当积分号下的函数含有待求函数 u 对自变量 x 及 y 的二阶导数时，則奥斯特洛格拉德斯基方程有形式：

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}=0。\tag{222}$$

如果認作 $D=1$，則可写：

$$F=-\frac{1}{2}(u_{xx}+u_{yy})^2+(1-\sigma)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)+pu,\tag{223}$$

因而导出对于静力弯曲的下面方程：

$$\Delta\Delta u=p。$$

在振动的薄板的情况，要添加动能，則有：

$$\rho u_{tt}+\Delta\Delta u=p。$$

这情况的特征是：若將表达式(223)中含有因子$(1-\sigma)$的这个項代入奥斯特洛格拉德斯基方程(222)的左端就恒等于零，因而这个項对奥斯特洛格拉德斯基方程来說沒有影响。然而必須指出，所說到的項在建立自然边界条件时發生了重大的影响。

94. 彈性学的基本方程 設 (u, v, w) 是連續媒質的形变的位移向量的分量。应变的張量的六个分量：

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy}=\tau_{yx},\ \tau_{xz}=\tau_{zx},\ \tau_{yz}=\tau_{zy},$$

給出在这媒質中应变的图像，其中 σ_x 是应变对于 x 軸的分量作用在与这軸正交的面积上(σ_y 及 σ_z 有类似意义)。$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 是应变对于 x 軸的分量作用在与 y 軸正交的面积上，或者是应变对于 y 軸的分量作用在与 x 軸正交的面积上。τ_{xz} 及 τ_{yz} 也有类似意义。在微小形变时，媒質的形变由形变張量的下面六个分量来表出：

$$(224)\qquad \begin{cases} \varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x};\quad \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y};\quad \varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x};\quad \gamma_{xz}=\gamma_{zx}=\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}; \\ \gamma_{yz}=\gamma_{zy}=\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}。 \end{cases}$$

ε_x, ε_y, ε_z 的値表示綫素在坐标軸的方向的增量，而 γ_{xy} 是 x 軸及 y 軸所成的直角的改变量。还引进兩个値，也就是：

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z,$$

它表征体积的相对改变量，及

$$s=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z。$$

可以証明，最后这兩个値不依賴于坐标軸的选擇。在古典的彈性学中，各向同性均勻物体的形变及应变的張量的分量之間有綫性关系，这关系表示广义霍克定律：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{2G}\left(\sigma_x-\frac{s}{m+1}\right);\quad \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{2G}\left(\sigma_y-\frac{s}{m+1}\right);\quad \gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz},$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{2G}\left(\sigma_z-\frac{s}{m+1}\right);\quad \gamma_{zx}=\frac{1}{G}\tau_{zx},$$

或者是：

$$\sigma_x=2G\left(\varepsilon_x+\frac{\theta}{m-2}\right);\quad \tau_{xy}=G\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y=2G\left(\varepsilon_y+\frac{\theta}{m-2}\right);\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz},$$

$$\sigma_z=2G\left(\varepsilon_z+\frac{\theta}{m-2}\right);\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx},$$

其中 G 及 m 是常数，它們是所給物質的特征，并且 G 称为切变模量，而 m 为横压縮系数（普阿松常数）。从霍克定律立即推出值 θ 及值 s 之間下面的关系：

$$\theta=\frac{1}{2G}\cdot\frac{m-2}{m-1}s。$$

其次，用 A 記关于單位体积的形变的力的功，它可以用形变的張量的分量来表达或者用应力的張量的分量来表达：

$$(225)\qquad A=G\left[\frac{m-1}{m-2}\theta^2-2(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x)+\frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\right]=$$
$$=\frac{1}{4G}\left\{\frac{m}{m+1}s^2-2(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2)\right\},$$

并且利用所写的公式，可驗証下面的关系式：

$$(226)\qquad \begin{cases}\sigma_x=\dfrac{\partial A}{\partial\varepsilon_x};\quad \tau_{xy}=\dfrac{\partial A}{\partial\gamma_{xy}};\quad \varepsilon_x=\dfrac{\partial A}{\partial\sigma_x};\quad \gamma_{xy}=\dfrac{\partial A}{\partial\tau_{xy}};\\ \sigma_y=\dfrac{\partial A}{\partial\varepsilon_y};\quad \tau_{yz}=\dfrac{\partial A}{\partial\gamma_{yz}};\quad \varepsilon_y=\dfrac{\partial A}{\partial\sigma_y};\quad \gamma_{yz}=\dfrac{\partial A}{\partial\tau_{yz}};\\ \sigma_z=\dfrac{\partial A}{\partial\varepsilon_z};\quad \tau_{zx}=\dfrac{\partial A}{\partial\gamma_{zx}};\quad \varepsilon_z=\dfrac{\partial A}{\partial\sigma_z};\quad \gamma_{zx}=\dfrac{\partial A}{\partial\tau_{zx}}。\end{cases}$$

可以証明，在彈性物体的每一点总存在这样三个互相正交的方向，如果我們取它們作为坐标軸，則在这点有等式 $\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$。我們取这些方向作为坐标軸，且用 ε_1, ε_2, ε_3 記这样选擇軸时以前曾用 ε_x, ε_y, ε_z 来記的那些值，由(225)，得到 A 在这点的表达式：

$$A=G\left[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2\right]。$$

而 A 的值为正的条件导出常数 m 应满足的不等式：$2<m\leqslant\infty$。

首先来講关于以曲面 S 为境界的彈性物体 D 的平衡条件。設作用在这物体上的質量力有分量：

$$X(x, y, z, t);\ Y(x, y, z, t);\ Z(x, y, z, t),$$

且設在曲面 S 的部份 S_1 上給定了位移向量，而在部份 S_2 上則是应力，且用 X_1, Y_1, Z_1 記这应力的分量。它們都是在 S_2 上的变点 M 的已知函数。A 展布在 D 上的积分及外力的功的变号之和給出所取的彈性物体的位能：

$$(227)\qquad \iiint\limits_D[A-(Xu+Yv+Zw)]dv-\iint\limits_{S_2}(X_1u+Y_1v+Z_1w)d\sigma。$$

这位能是物体的点的坐标 (x, y, z) 的三个函数 u, v, w 的泛函。如果写

出所指的泛函的奥斯特洛格拉德斯基方程，而且必须注意在構成奥斯特洛格拉德斯基方程时沿着曲面的积分不起作用，则我們获得平衡方程。如果注意到 A 不依賴于函数 u, v, w 本身而只依賴于它們的导数，那末就导出泛函 (227) 关于函数 u 的奥斯特洛格拉德斯基方程：

$$-X-\frac{\partial}{\partial x} A_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y} A_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z} A_{u_z}=0 。\tag{228}$$

注意到，A 只通过 ϵ_x 而依賴于 u_x，只通过 γ_{xy} 而依賴于 u_y，且只通过 γ_{xz} 而依賴于 u_z，并且注意(226)，就可將上面的方程写作如下形式：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0 。\tag{229}$$

类似地可写出另外兩个平衡方程。在境界曲面的部份 S_1 上函数 u, v, w 的値是固定的，而在部份 S_2 上自然边値条件[75]有形式：

$$\sigma_x \cos(n, x)+\tau_{xy} \cos(n, y)+\tau_{zx} \cos(n, z)-X_1=0,$$
$$\tau_{xy} \cos(n, x)+\sigma_y \cos(n, y)+\tau_{yz} \cos(n, z)-Y_1=0,$$
$$\tau_{zx} \cos(n, x)+\tau_{yz} \cos(n, y)+\sigma_z \cos(n, z)-Z_1=0,$$

其中 n 是 S_2 的向外法綫的方向。

在方程 (229) 中如用形变的張量的分量来代替应变的張量的分量，则我們得到下面三个平衡方程：

$$G\left(\Delta u+\frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+X=0,$$
$$G\left(\Delta v+\frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)+Y=0,$$
$$G\left(\Delta w+\frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)+Z=0,$$

或是取向量形式：

$$G\left(\Delta \boldsymbol{u}+\frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\right)+\boldsymbol{F}=0。$$

我們注意，对彈性势量来說，可以写公式(225)为下形式：

$$A=G\left\{\frac{m-1}{m-2} \theta^2+\frac{1}{2}\left(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2\right)+2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right)+\cdots\right]\right\},\tag{230}$$

其中 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 是位移向量的旋轉量的分量，也就是，

$$\omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} ; \quad \omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} ; \quad \omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}。$$

注意到公式 (230) 中在方括弧中的那个式子，它根本不影响奥斯特洛格

拉德斯基方程，也就是，如果写出积分：

$$\iiint_D \left[G \frac{m-1}{m-2} \theta^2 + \frac{G}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) - (Xu + Yv + Zw) \right] dv$$

的奥斯特洛格拉德斯基方程，我們就得到彈性物体的平衡方程。

为了获得运动的方程，按奥斯特洛格拉德斯基-哈米尔頓原理，只須在写出的积分号下的式子上添加对应于动能(有相反符号的)的项：

$$-\frac{\rho}{2}(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2),$$

其中 ρ 是物体的密度，且对有限时刻区間 $[t_0, t_1]$ 取积分。这样一来，事实归結为对积分：

$$\int_{t_0}^{t_1} \iiint_D \left[-\frac{\rho}{2}(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) + A - (Xu + Yv + Zw) \right] dt\, dv$$

关于以 (x, y, z, t) 为自变量的函数 u, v, w 的奥斯特洛格拉德斯基方程的作出。不难檢驗，这就导出彈性动力学中的下面基本方程，記它作向量形式：

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = G\left(\Delta \boldsymbol{u} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \right)。$$

这时照常認为在时刻的边值 $t = t_0$ 及 $t = t_1$ 的位移应与实际的位移一致[87]。

95. 絕对極值 在[63]节中我們曾引入絕对極值的概念。此刻我們考察一些特例且引出与它們联系的关于絕对極值存在的某些結論。

設有泛函：

$$J(y) = \int_0^l [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y]\, dx, \tag{231}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 及 $f(x)$ 是在閉区間 $[0, l]$ 内的連續函数，此外 $p(x)$ 有連續导数且

$$p(x) > 0;\quad q(x) \geqslant 0。\tag{232}$$

設函数 $y(x)$ 連同它的导数 $y'(x)$ 在区間 $[0, l]$ 内都是連續的且滿足边界条件：

$$y(0) = a;\quad y(l) = b。\tag{233}$$

在 $y(x)$ 的这样函数 D 类中要求出那样的一个函数，它使泛函(231)

取最小值。

对这泛函的尤拉方程有形式：

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y = f(x)。 \tag{234}$$

我們来証明，在条件(232)下，这方程在区間 $[0, l]$ 上有解，这解滿足条件(233)，而且这样的解是唯一的。設 $z_0(x)$ 及 $z_1(x)$ 是齐次方程：

$$\frac{d}{dx}[p(x)z'] - q(x)z = 0 \tag{235}$$

的解，滿足初始条件：

$$z_0(0) = 0;\ z_0'(0) = 1;\ z_1(l) = 0;\ z_1'(l) = 1。$$

由于 $p(x) > 0$，存在及唯一性定理保証了这些解的存在。其次，我們証明 $z_1(0) \neq 0$。这無异于是齐次方程(235)沒有不恒等于零且当 $x = 0$ 及 $x = l$ 时等于零的解。同时显然 $z_0(l) \neq 0$，因而解 $z_0(x)$ 及 $z_1(x)$ 是綫性無关的。

方程(234)的通积分有形式：

$$y_0(x) = c_0 z_0(x) + c_1 z_1(x) + g(x),$$

其中 c_0 及 c_1 是任意常数，且 $g(x)$ 是方程(234)的任何特解，当 $p(x) > 0$ 时，存在定理保証了在区間 $[0, l]$ 上这个特解的存在。边界条件(233)引出方程：

$$c_1 z_1(0) + g(0) = a;\ c_0 z_0(l) + g(l) = b,$$

从它們 c_0 及 c_1 可唯一决定。这样一来，我們得到方程(234)的唯一解，它滿足边界条件(233)，并且这个解在区間 $[0, l]$ 上有二阶連續导数。剩下要証明 $z_0(l) \neq 0$。在方程(235)中代入 $z = z_0(x)$，則可写为：

$$\frac{d}{dx}[p(x)z_0'] = q(x)z_0。 \tag{236}$$

由于条件 $z_0(0) = 0$; $z_0'(0) = 1$，函数 $z_0(x)$ 及它的导数在充分逼近

于 $x=0$ 的值 x 处总是正的。因之等式(236)的两端在所指的值 x 处总是非负的，因此在 $x=0$ 时等于正值的乘积 $p(x)z_0'$，当值 x 充分逼近于 $x=0$ 时它不减少，且由于(236)，只在 $z_0(x)$ 为负后这乘积才可以开始减少。然而为了要求 $z_0(x)$ 是负的，必须它的导数 $z_0'(x)$ 亦即 $p(x)z_0'$ 预先变为負的。这样一来，我們导出了矛盾，因而可断言，当 $0<x\leqslant l$ 时 $z_0(x)>0$。

上面建立的方程(234)的解 $y_0(x)$ 屬于 C_2 类。我們証明，它給泛函(231)以極小，更确切地說，我們証明 $J(y_0)\leqslant J(y)$，其中 y 是 D 类中的任何函数，并且等号只在 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 恒等时成立。

D 中的任何函数 $y(x)$ 可表如形式 $y(x)=y_0(x)+\eta(x)$，其中 $\eta(x)$ 連同它的导数在区間 $[0, l]$ 上連續，并且它在这区間的兩端点等于零。我們有：

$$J(y)-J(y_0)=2\int_0^l[p(x)y_0'\eta'+q(x)y_0\eta+f(x)\eta]dx+$$
$$+\int_0^l[p(x)\eta'^2+q(x)\eta^2]dx。$$

注意到 $y_0(x)$ 及 $\eta(x)$ 的性質，我們就能够在第一积分內引用分部积分法，得：

$$J(y)-J(y_0)=2\int_0^l\left[-\frac{d}{dx}[p(x)y_0']+q(x)y_0+f(x)\right]\eta\,dx+$$
$$+\int_0^l[p(x)\eta'^2+q(x)\eta^2]dx+p(x)y_0'\eta\Big|_{x=0}^{x=l},$$

从而注意到 $y_0(x)$ 是方程(234)的解且 $\eta(0)=\eta(l)=0$，則由于(232)，得：

$$J(y)-J(y_0)=\int_0^l[p(x)\eta'^2+q(x)\eta^2]dx\geqslant 0,$$

并且等号只当 $\eta(x)\equiv 0$ 时成立。事实上，如果有等号，則必有 $\eta'(x)\equiv 0$，亦即 $\eta(x)$ 在区間 $[0, l]$ 上是常数。然而 $\eta(0)=0$，因此

在区間$[0, l]$上$\eta(x)\equiv 0$。这样一来，我們的断言已証得，也就是，在$y(x)$为$y_0(x)$时且仅在此时泛函(231)在D类中有最小值。我們注意，在D类中的函数，只需要一阶导数的存在且連續，而使泛函(231)达到最小值的$y_0(x)$有二阶連續导数。

作为第二个例子，考察下泛函：

$$J(y)=\int_{-1}^{+1}x^2y'^2dx \tag{237}$$

在下面的連續函数D类中的最小值的問題，設这类中的函数在区間$[-1, +1]$上有連續导数且滿足边界条件：

$$y(-1)=a;\ \ y(+1)=b, \tag{238}$$

其中$a\neq b$。由于后一条件，D类中不含常数，于是对于D类中的任何函数有$J(y)>0$。数$J(y)$的集合应有下确界[I;42]。我們証明，这下确界等于零。

不难檢驗，对于任何正数ε，下面函数：

$$y=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\varepsilon}} \tag{239}$$

屬于D类。我們有：

$$y'=\frac{b-a}{2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\varepsilon}}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2},$$

因之，对函数(239)：

$$J(y)<\int_{-1}^{+1}(\varepsilon^2+x^2)\,y'^2dx=\frac{\varepsilon^2(b-a)^2}{4\operatorname{arc\,tg}^2\dfrac{1}{\varepsilon}}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\varepsilon^2+x^2}=\frac{\varepsilon(b-a)^2}{2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\varepsilon}},$$

当$\varepsilon\to 0$时，右端趋于零，从而可見泛函(237)在D类中的下确界等于零。然而因为D类中不含常数，且对D类中的任何函数有$J(y)>0$，这是前面已經指出过的。因之$J(y)$在D类中不能达

到下确界，从而在这类中泛函(237)沒有最小值。

96. 絕对極值(續) 作为第三个例子，考察泛函：

$$J(u)=\iint_B (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy, \tag{240}$$

其中 B 是以坐标原点为中心且半徑为一的圓。所写的积分通常称为狄义赫利积分。我們对 D 类中的函数 $u(x, y)$ 来考察这泛函，所謂 D 类中的函数是指在閉圓 $x^2+y^2\leqslant 1$ 內为連續而在这圓的內部有一阶連續导数，且在圓周 l 上滿足边界条件

$$u|_l=f(\theta) \tag{241}$$

的函数，其中 $f(\theta)$ 是給定在圓周 l 上的幅角 θ 的連續函数。因为我們未曾假設偏导数 u_x 及 u_y 在閉圓內的連續性，我們应把积分(240)看作反常积分，也就是，看作是展布在以 ρ 为半徑的圓 $B_\rho(x^2+y^2\leqslant\rho^2)$ 上的积分当 $\rho\to 1$ 时的極限。因为积分号下函数是非負的，当 ρ 增加时对 B_ρ 的积分不減少，因而所指的極限或为有限或等于$(+\infty)$。照例，在第一情況，我們說这积分是收斂的，而在第二情況，則說它是發散的。在后一情况可認为积分的值等于$(+\infty)$。泛函(240)的奧斯特洛格拉德斯基方程是拉普拉斯方程[67]：

$$u_{xx}+u_{yy}=0,$$

因而我們有权希望在圓 B 內为調和且在 l 上取边界值(241)的函数給泛函(240)在所指 D 类中以最小值。我們知道，这样的調和函数是存在且唯一的[II; 195]。用 $v(x, y)$ 来記它。

首先証明，可以給定条件(241)中出現的連續函数 $f(\theta)$，使当 $u=v$ 时泛函(240)：

$$J(v)=\iint_B (v_x^2+v_y^2)\,dx\,dy \tag{242}$$

等于$(+\infty)$。事实上，令：

$$(243) \qquad f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(2^{2n}\theta)。$$

所写的級数显然关于 θ 是絕对且一致收斂的，因之它确定具有周期 2π 的連續周期函数 $f(\theta)$。具有边界值 (243) 的狄义赫利問題的解有形式 [II; 195]：

$$v(x, y)=v(r, \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2^{2n}}}{2^n}\cos(2^{2n}\theta)。$$

在积分(242)中变换为極坐标：

$$(244) \qquad J(v)=\iint\limits_{r<1}\left(v_r^2+\frac{1}{r^2}v_\theta^2\right)r\,dr\,d\theta。$$

我們有：

$$v_r=\sum_{n=1}^{\infty}2^n r^{2^{2n}-1}\cos(2^{2n}\theta);\quad v_\theta=-\sum_{n=1}^{\infty}2^n r^{2^{2n}}\sin(2^{2n}\theta),$$

并且所写的級数在任何圓 $r\leqslant\rho$ 內都是絕对且一致收斂的，此处 $\rho<1$。如果注意倍角的正弦及余弦在長为 2π 的区間上的正交性，則得：

$$\iint\limits_{r\leqslant\rho}\left(v_r^2+\frac{1}{r^2}v_\theta^2\right)r\,dr\,d\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\iint\limits_{r\leqslant\rho}2^{2n}r^{2^{2n+1}-1}\,dr\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^{\rho}2^{2n}r^{2^{2n+1}-1}\,dr=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2^{2n+1}},$$

因而当 $\rho\to 1$ 时，最后級数的和無穷增大，从而推出，在条件(243)下积分(242)的値等于$(+\infty)$。

这样一来，在所考察的情况，調和函数 $v(x, y)$ 不給泛函(240)以最小值。可以証明，如果在 $u=v$ 时积分(240)等于$(+\infty)$，則对于 D 类中滿足边界条件(241)的任何函数，这积分也等于$(+\infty)$。这从下面的定理立即得出：

定理 如果对于 D 类中滿足边界条件(241)的任何函数积分(240)为有限值，則对于 D 类中的調和函数 v 这积分也为有限值，

并且这时对于 D 中的任何函数 u 我們有：

(245) $$J(u)\geqslant J(v),$$

而且等号只当 $u\equiv v$ 时成立。

如果假設調和函数 $v(x, y)$ 在 B 的內部的一阶偏导数是有界的，定理的証明十分簡單的。这时积分(240)显然为有限值。我們只須証明，如果对于 D 中的任何函数 w 积分 $J(w)$ 为有限值，則 $J(w)\geqslant J(v)$，而且等号只当 $w\equiv v$ 时成立。我們可写：$w=v+\eta$，其中 $\eta(x, y)$ 在 B 的內部有一阶連續偏导数，且它在閉圓 B 上連續而在圓周 l 上等于零。我們有：

(246) $$J_\rho(v+\eta)=J_\rho(v)+J_\rho(\eta)+2J_\rho(v, \eta),$$

其中用 $J_\rho(u)$ 記积分 $J(u)$ 展布在圓 B_ρ 上的值，且

$$J_\rho(v, \eta)=\iint\limits_{B_\rho}(v_x\eta_x+v_y\eta_y)\,dxdy。$$

函数 $v(x, y)$ 在 B 的內部有二阶連續偏导数，因之应用格林公式，我們得到：

$$J_\rho(v, \eta)=\iint\limits_{B_\rho}(v_x\eta_x+v_y\eta_y)\,dx\,dy=$$

$$=-\iint\limits_{B_\rho}\eta\Delta v\,dxdy+\int_{l_\rho}\eta\frac{\partial v}{\partial n}\rho d\theta,$$

其中 l_ρ 是以原点为中心 ρ 为半徑的圓周，而 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 是 v 沿这圓周的法綫的导数。因为 v 是調和函数，右端中的二重积分等于零，而在曲綫积分中当 ρ 趋于一时 η 关于幅角一致收斂于零，而 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 按照条件保持有界，因而这个曲綫积分显然趋向于零。这样一来，取公式(246)在 $\rho\to 1$ 时的極限，就給出：

$$J(w)-J(v)=\iint\limits_{B}(\eta_x^2+\eta_y^2)\,dxdy,$$

从而推知，$J(w)\geqslant J(v)$，并且等号只当 $\eta_x\equiv0$ 及 $\eta_y\equiv0$ 时成立，亦卽如果 η 在圓域 B 內是常数。然而在 l 上 $\eta=0$，因之 $\eta\equiv0$。

現在来証明一般情况下的定理。和前面一样，設 w 是使积分 $J(w)$ 为有限値的 D 中一个函数，且設：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{247}$$

是条件(241)中出現的函数 $f(\theta)$ 的富里埃級数。函数 v 在圓的內部由下級数来确定：

$$v(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n。 \tag{248}$$

設：

$$v_m(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n, \tag{249}$$

且用等式：$w=v_m+\eta_m$ 来确定函数 $\eta_m(r,\theta)$。这函数 $\eta_m(r,\theta)$ 在 B 的內部有一阶連續偏导数，它在閉圓內連續且在 l 上的边界値 $\eta_m(1,\theta)$ 有富里埃級数：

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)。$$

这可立卽从(249)及 w 的边界値有富里埃級数(247)显示出来。从而可推得：

$$\int_0^{2\pi}\eta_m(1,\theta)\cos k\theta d\theta=0;\quad \int_0^{2\pi}\eta_m(1,\theta)\sin k\theta d\theta=0。 \tag{250}$$
$$(k=0,1,2,\cdots,m)\qquad\qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

像前面一样，我們有：

$$J_\rho(v_m,\eta_m)=-\iint_{B_\rho}\eta_m\Delta v_m dxdy+\int_{l_\rho}\eta_m(\rho,\theta)\frac{\partial v_m(\rho,\theta)}{\partial\rho}\rho d\theta。$$

二重积分等于零，而在曲綫积分中积分号下的函数关于 θ 一致趋于

$$\eta_m(1,\theta)\left.\frac{\partial v_m(\rho,\theta)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1},$$

且由于 (249) 及 (250) 这乘积的积分等于零。这样一来，当 $\rho\to 1$ 时，$J_\rho(v_m, \eta_m)\to 0$。在公式：

$$J_\rho(v_m+\eta_m)=J_\rho(v_m)+J_\rho(\eta_m)+2J_\rho(v_m, \eta_m)$$

中取 $\rho\to 1$ 时的極限，得：

$$J(w)=J(v_m)+J(\eta_m)。\tag{251}$$

按条件 $J(w)$ 为有限値，且从最后公式看出 $J(\eta_m)$ 也为有限値。由于(249)对于 $J(v_m)$ 这也是显然的。

从(251)得：

$$J(v_m)\leqslant J(w),\tag{252}$$

且对于任何 $\rho<1$ 更有：

$$J_\rho(v_m)\leqslant J(w)。\tag{253}$$

但在圓 B_ρ 内級数 (248) 可以逐項微分且所得的級数在 B_ρ 内一致收斂，亦即在圓 B_ρ 内 v_m 的导数当 $m\to\infty$ 时一致收斂于 v 的对应导数。这样一来，当 $m\to\infty$ 时不等式(253)給出：

$$J_\rho(v)\leqslant J(w),$$

从而，当 $\rho\to 1$ 时得出：$J(v)\leqslant J(w)$。

如果在所得的最后不等式中等号成立，那末，我們就来証明 $w\equiv v$。令 $w=v+\eta$，其中 η 照例在 B 的内部有一阶連續导数，它在閉圓内連續且在圓周 l 上等于零。

我們有：

$$J_\rho(\eta)=J_\rho(w)+J_\rho(v)-2J_\rho(w, v)。\tag{254}$$

如果注意：

$$|2(w_xv_x+w_yv_y)|\leqslant w_x^2+w_y^2+v_x^2+v_y^2,$$

則我們有：

$$|2J_\rho(w, v)|\leqslant J_\rho(w)+J_\rho(v),$$

从而，对于一切 $\rho<1$，得出：

$$|2J_\rho(w, v)|\leqslant J(w)+J(v),$$

亦即当 $\rho\to 1$ 时 $J_\rho(w, v)$ 保持有界。

公式 (254) 的右端的前兩項在 $\rho\to 1$ 时为有限值，因之 $J_\rho(\eta)$ 的值保持有界，亦即当 $\rho\to 1$ 时它为有限值。其次我們写：

$$J_\rho(w)=J_\rho(v)+J_\rho(\eta)+2J_\rho(v, \eta),$$

且从 $J_\rho(w)$，$J_\rho(v)$ 及 $J_\rho(\eta)$ 的有限極限的存在，推出在 $\rho\to 1$ 时 $J_\rho(v, \eta)$ 有有限極限。記：

$$J(v, \eta)=\lim_{\rho\to 1} J_\rho(v, \eta)。$$

引进任意实参数 ε，我們可写：

$$J_\rho(v+\varepsilon\eta)=J_\rho(v)+2\varepsilon J_\rho(v, \eta)+\varepsilon^2 J_\rho(\eta)。$$

当 $\rho\to 1$ 时右端的所有項有有限極限，因之对于左端也一样。取兩边的極限，得：

$$(255)\qquad J(v+\varepsilon\eta)=J(v)+2\varepsilon J(v, \eta)+\varepsilon^2 J(\eta)。$$

这样一来，对于任何实数 ε，狄义赫利积分 (240) 对函数 $u=v+\varepsilon\eta$ 为有限值，因而由于前面所証的我們有：

$$(256)\qquad J(v)\leqslant J(v+\varepsilon\eta),$$

并且等号当 $\varepsilon=0$ 及 $\varepsilon=1$ 时可达到，因为按条件 $J(w)=J(v)$。从而推出，在公式 (255) 的右端的三項式当 $\varepsilon=0$ 及 $\varepsilon=1$ 时达到最小值，而这情况只有在 $J(\eta)=0$ 时，亦即在 $\eta\equiv 0$ 时才有可能，因而从 $w=v+\eta$ 推知 $w=v$。定理完全証畢。

在关于边界問題的一章内，我們將再講对于等周問題的絕对極值的問題，亦即当附加条件是积分形式时的情况。

97. 变分的直接方法 近代对处理絕对極值問題的解的各种方法有很大的进展，这些方法避免了微分方程的采用。这时直接从求極值的积分的形式出發，借助于某些極限运算企圖作出給泛函以絕对極值的函数。

在这情况，像我們在前面曾經提过的一样，問題比較微分学中的相应問題困难得多了。在微分学的情况，按維尔斯特拉斯关于連續函数的基本定理，我們知道，任何在閉区域內連續的函数，一定在这区域的某点取最大(或

最小)值。在变分問題里，却没有这样的簡單定理，因此自然提出了問題的解的存在的問題。

設 $J(y)$ 是待求函数 $y(x)$ 的某泛函，我們求这样函数，使提到的泛函在某 C 类中的函数 $y(x)$ 有最小值。对于 C 类中任何选择的函数 $y(x)$，泛函 J 得到确定值。因此利用 C 类中一切函数，我們得到泛函 J 的無穷多个值。設 d 是这無穷个值所成的集合的下确界。我們不能預先知道，在 C 类中是否存在函数 $y(x)$ 給泛函以这个最小值 d，然而由下确界的定义，我們在 C 类中总可找到这样函数列 $y_n(x)$，当 n 無限增大时 $J(y_n)$ 有極限 d。函数列 $y_n(x)$ 通常称为極小序列。在变分学中的直接方法的实現的一个可能性是下面的手段：給出構造極小序列的方法，要使从構成的極小序列借助于某些極限运算获得待求函数，而这函数給泛函以最小值。如果用这方法得以把問題进行到底，則这方法导出微分方程的边界問題的解，而这方程表示所研究的泛函的極值的必要条件。这方法不仅可应用到对解的存在的証明，而且对近似計算也建立了实际上便利的方法。上面所指的原則是以解决边界問題的著名的里茨方法作基础的。我們指出，这方法在微分方程方面更广泛的推广是由 Б. Г. 加列尔金給出的（工程及技术公报，1915 年），而这推广是和变分学沒有联系的。里茨的工作是 1908 年在 Journal für die reine und angew. Mathem., Bd. 135 上發表的。

直接方法的理論基础自然要用到实变数函数理論，尤其对偏微分方程方面来說更是这样。我們把这方面的討論放到卷五中。此刻考察直接方法的应用的几个簡單例子。我們將在边值問題的一章中回到这个問題。

里茨及加列尔金方法的收斂性的研究以及关于誤差的估計，在苏联数学家的一系列工作中曾詳尽地加以探討。关于这些問題的叙述和适当的参考文献的目录可在 Л. В. 康脫若維奇及 В. И. 克雷洛夫所著的"高等分析的近似方法"一書中找到。里茨及 Б. Г. 加列尔金的方法的收斂性的研究很大部份見于 С. Г. 米哈林所著的"数学物理的直接方法"(1950 年)一書中。

直接方法的理論的研究与对应的極值函数的存在定理以及它們的性質的研究之間的联系，在 С. Л. 索伯列夫的論文"泛函分析在数学物理中的某些应用"(1950 年)中曾予以闡明。

98. 例 1. 我們取[95]节中考察的泛函：

$$J(y)=\int_0^l[p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y]dx \tag{257}$$

且在前面[95]提过的满足齐次边界条件

(258) $$y(0)=y(l)=0$$

的 D 类函数中求它的最小値，并且像[95]节中一样，假設 $p(x)>0$ 及 $q(x)\geqslant 0$。

我們知道，满足方程(254)及边界条件(258)的函数 $y_0(x)$ 給出所提出的問題的解。設：

(259) $$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots$$

是任一函数列，这列中的函数与它們的一阶导数一起在区間[0, l]內連續，它們满足条件(258)且綫性無关的。

作列中的前 n 个函数的綫性組合，它具有暂时未确定的常系数：

$$y_n=a_1^{(n)}u_1+\cdots+a_n^{(n)}u_n,$$

把它代入积分(257)。在进行积分之后，我們得到如下形式的結果：

(260) $$J_n=J(y_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}a_i^{(n)}a_j^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}\beta_i a_i^{(n)},\quad(\alpha_{ij}=\alpha_{ji})。$$

从这样条件来确定系数 $a_i^{(n)}$，即要求 $a_i^{(n)}$ 的値満足表达式 J_n 有極値的必要条件，簡單地講，亦即把 J_n 对 $a_i^{(n)}$ 的偏导数等于零。这样一来，我們得到确定 $a_i^{(n)}$ 的 n 个一次方程：

(261) $$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_k^{(n)}+\frac{1}{2}\beta_i=0,\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

这方程組的行列式同时是在表达式(260)中出現的二次型的判别式，并且是由表示式 $(py_n'^2+qy_n^2)$ 的积分产生的。由于所作的假設，提到的二次型是正定的。事实上，只在 $y_n\equiv 0$ 的情况这二次型才可以等于零，而由于函数 $u_k(x)$ 的綫性無关性，就导出所有系数 $a_k^{(n)}$ 都等于零。然而正定的二次型的判别式等于它的特征値的乘积，这判别式一定是正値。于是，方程組(261)的行列式不等于零，我們从这方程組找出 $a_i^{(n)}$ 的确定値，因而可作出 n 次近似 $y_n(x)$。一般地講，当 n 增大时，已經計算出来的系数有所改变。因此在記这些系数时，还对它們附以上标，这上标指出近似的号碼。

如果注意，在表达式(260)中出現的二次型是正定的，以及方程組(261)有唯一解，就可以斷言这方程組的解 $(a_1^{(n)},\ \cdots,\ a_n^{(n)})$ 給出表达式(260)的最小値。当 n 增大时，在更广泛的函数类中可求出泛函的最小値，因之，我們可肯定：

(262) $$J(y_q)\leqslant J(y_p),\ 当\ q>p\ 时。$$

此外，对于(259)中的函数的任何綫性組合 $z(x)$：

(263) $$z(x)=\sum_{k=1}^{m}a_k u_k(x),$$

我們有[95]：

$$J(z)\geqslant J(y_0)。$$

我們証明，在关于函数列(259)作某些假設下，函数 $y_n(x)$ 在区間 $[0, l]$ 上一致收斂于上面提到的函数 $y_0(x)$。

我們就来陈述这些假設。对于任何函数 $y(x)$，它本身和它的导数在区間$[0, l]$上都是連續的，且对于任何給定的正数 ε，存在(259)中函数这样的有限綫性組合，这組合滿足下面不等式：

(264) $$\left|y(x)-\sum_{k=1}^{m}a_k u_k(x)\right|\leqslant\varepsilon;\quad\left|y'(x)-\sum_{k=1}^{m}a_k u_k'(x)\right|\leqslant\varepsilon,\quad(0\leqslant x\leqslant l)。$$

首先，我們証明

(265) $$J(y_n)\to J(y_0)。$$

我們有[95]：

(266) $$J(y_n)\geqslant J(y_0),\qquad(n=1, 2, 3, \cdots)。$$

如果应用(264)到函数 $y(x)=y_0(x)$，且利用 ε 的任意性，我們就可断言，对于任何給定的正数 δ，存在(259)中的函数这样的綫性組合(263)，使 $J(z)-J(y_0)\leqslant\delta$。其次，由 $y_m(x)$ 的作法，我們有 $J(y_m)-J(y_0)\leqslant\delta$，因之由(262)，可写：当 $n\geqslant m$ 时，$J(y_n)-J(y_0)\leqslant\delta$，从而，由于正数 δ 的任意性，就推得(265)。其次，容易檢驗：

$$J(y_n)-J(y_0)=2\int_0^l[py_0'(y_n'-y_0')+qy_0(y_n-y_0)+f(y_n-y_0)]dx+$$
$$+\int_0^l[p(y_n'-y_0')^2+q(y_n-y_0)^2]dx。$$

在第一积分內进行分部积分且注意 $y=y_n-y_0$ 滿足条件(258)，我們得到这积分的表达式：

$$\int_0^l\left[-\frac{d}{dx}(py_0')+qy_0+f\right](y_n-y_0)dx,$$

从而看出所說的积分等于零，因此

$$J(y_n)-J(y_0)=\int_0^l[p(y_n'-y_0')^2+q(y_n-y_0)^2]dx,$$

从而：

(267) $$J(y_n)-J(y_0)\geqslant\int_0^l p(y_n'-y_0')^2dx。$$

用 a 記正函数 $p(x)$ 在区間[0, l]上的最小値，根据(267)得到：

(268)
$$\int_0^l (y_n'-y_0')^2dx \leqslant \frac{J(y_n)-J(y_0)}{a}。$$

其次，布里亚柯夫斯基不等式給出：

$$|y_n-y_0|^2=\left|\int_0^x (y_n'-y_0')\,dx\right|^2 \leqslant \int_0^x (y_n'-y_0')^2dx\int_0^x 1^2\,dx \leqslant l\int_0^l (y_n'-y_0')^2dx,$$

因而根据(268)，得：

$$|y_n(x)-y_0(x)| \leqslant \sqrt{\frac{l}{a}}\ \sqrt{J(y_n)-J(y_0)},\quad (0\leqslant x\leqslant l),$$

从而，由于(265)，推出在区間[0, l]上 $y_n(x)$ 一致收斂于 $y_0(x)$。

我們証明，滿足条件(258)的函数：

(269)
$$u_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l},\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

也滿足条件(264)。

把在区間[0, l]内的已知函数 $y'(x)$ 照偶函数式样拓展到区間[$-l$, 0]上。对于任何給定的正数 η 求出这样三角多項式：

$$T(x)=c_0+\sum_{k=1}^{m} c_k\cos\frac{k\pi x}{l},$$

使[II; 164]：

(270)
$$|y'(x)-T(x)|\leqslant\eta,\qquad (-l\leqslant x\leqslant +l),$$

其中：

$$c_0=\frac{1}{l}\int_0^l T(x)\,dx。$$

然而从(270)推出 $T(x)=y'(x)+f(x)$，其中 $|f(x)|\leqslant\eta$，因之，如果注意 $y(0)=y(l)=0$，就得到：

$$c_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx,$$

从而 $|c_0|\leqslant\eta$，因之从(270)推得：

$$\left|y'(x)-\sum_{k=1}^{m} c_k\cos\frac{k\pi x}{l}\right|\leqslant\eta+|c_0|\leqslant 2\eta。$$

將所写的差式从 0 到 x 积分，得到：

$$\left|y(x)-\sum_{k=1}^{m}\frac{l}{k\pi}\,c_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right|\leqslant 2\eta l,$$

且取 $\eta=\frac{\varepsilon}{2(l+1)}$，我們得到(269)中的函数的綫性組合：

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{l}{k\pi}c_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

这組合滿足条件(264)。

完全类似地，利用关于連續函数的多项式逼近定理，可以証明下面函数列：

$$u_k(x)=(l-x)x^k,\qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

也满足条件(264)。显然，这列中的所有函数也滿足条件(258)。

2. 里茨方法的收斂性的証明对偏微分方程来說有更大的困难，因而仅限于特例来討論。

考察由不等式 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 及 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 确定的正方形 B 的情况的普阿松方程：

(271) $$u_{xx}+u_{yy}=g(x,y),$$

且取待求函数 u 在提到的正方形的境界 l 上等于零作为边界条件。我們設已知函数 $g(x,y)$ 在正方形 B 內可展为富里埃級数：

(272) $$g(x,y)=\sum_{p,q=1}^{\infty}c_{pq}\sin px\sin qy,$$

并且級数 $\sum_{p,q=1}^{\infty}|c_{pq}|$ 是收斂的。

方程(271)是积分：

(273) $$J(u)=\iint_B(u_x^2+u_y^2+2gu)\,dxdy$$

的尤拉方程。在这里待求函数是两个自变量的函数，因此自然用关于倍角的正弦的二重級数的部份和的形式来求近似解：

(274) $$u_{mn}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}a_{pq}\sin px\sin qy。$$

我們用来展开近似解的基本函数显然都滿足边界条件。將表达式(274)代入(273)的积分中，且利用三角函数的乘积的积分的已知公式，得：

$$\frac{4}{\pi^2}J(u_{mn})=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}(p^2+q^2)a_{pq}^2+2\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}c_{pq}a_{pq}。$$

把上面表达式对 a_{pq} 的导数等于零，我們引出待求系数的下面表达式：

$$a_{pq}=-\frac{c_{pq}}{p^2+q^2}。$$

在这里，系数的值不依賴于近似的号碼，因为当这号碼增大时已經計算出来

的系数保持不变，因之取極限后我們导出下面函数：

$$u(x, y)=-\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{c_{pq}}{p^2+q^2}\sin px\sin qy。\tag{275}$$

如果注意到級数 $\sum_{p,q=1}^{\infty}|c_{pq}|$ 的收斂性，則不难看出級数(275)可以对自变量兩次逐項微分。从而立即推出(275)中的函数确实满足方程(271)。边界条件的满足是很明显的。所提出的問題只有唯一解。事实上，如果存在兩个函数 u_1 及 u_2 都满足方程(271)及边界条件，則它們的差应满足拉普拉斯方程，且在正方形 B 的境界上这差等于零。从而立即推出[II; 194]这差恒等于零。

3. 現在考察方程的右端是給定的值的情况：

$$u_{xx}+u_{yy}=c,$$

且对于由不等式 $-a\leqslant x\leqslant +a$；$-a\leqslant y\leqslant +a$ 确定的正方形 B 內在和上例一样的边界条件下求这方程的解。

在这里，(273)中的积分是：

$$J(u)=\iint_B(u_x^2+u_y^2+2cu)\,dxdy。\tag{276}$$

我們对待求函数来求变量 x 及 y 的多項式形式的近似表达式，而为了要满足边界条件，在多項式的前面放上因子 $(x^2-a^2)(y^2-a^2)$，也就是，設

$$u_n=(x^2-a^2)(y^2-a^2)\sum_{p+q\leqslant n}a_{pq}x^py^q。$$

由于正方形 B 的对称性，在所写的多項式中，只須保留含有自变量的偶次幂的項。此外，由于同样的对称性，必須認为多項式是关于兩个自变量对称的。取零次幂的多項式是：

$$u_0=a_{00}^{(0)}(x^2-a^2)(y^2-a^2)。$$

將这表达式代入(276)的积分中，进行积分且把对 $a_{00}^{(0)}$ 的导数等于零，我們得到 $a_{00}^{(0)}$ 的值：

$$a_{00}^{(0)}=\frac{5}{16}\frac{c}{a^2}。$$

作为二次近似，取：

$$u_1=(x^2-a^2)(y^2-a^2)[a_{00}^{(1)}+a_{02}^{(1)}(x^2+y^2)]。$$

施行前面所說的运算，多項式的系数有以下的数值：

$$a_{00}^{(1)}=\frac{5}{16}\cdot\frac{259}{277}\cdot\frac{c}{a^2}；\quad a_{02}^{(1)}=\frac{15}{32}\cdot\frac{35}{277}\cdot\frac{c}{a^4}。$$